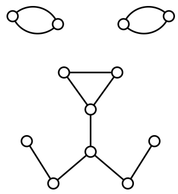
Journées Graphes et Algorithmes 2023



Lyon

21/11/2023-24/11/2023

Table des matières

Algorithmic aspects of finding large acyclic subgraphs of directed graphs

Alantha Newman, G-scop, Grenoble, alantha.newman@grenoble-inp.fr

We discuss the problem of finding large acyclic subgraphs -both subgraphs and induced subgraphs- of directed graphs. We will see tools that are based on mathematical programming relaxations as well as those based on combinatorial approaches. Barriers to progress and other open problems will be highlighted along the way.

A counting argument applied to graph colorings

Matthieu Rosenfeld, LIRMM, Montpellier, matthieu.rosenfeld@gmail.com

The Lovász Local Lemma is one of the central tools of Erdős' probabilistic method. This rather simple lemma has been applied to SAT formulas, graph colorings, hypergraph coloring, combinatorics on words, geometry, and countless other topics. This Lemma essentially tells that given a set of "bad events", under the right conditions, the probability that no events occur is nonzero. It implies the existence of a coloring or an affection of the variables with the desired properties. There are many versions of the Lovász Local Lemma that apply to different situations. Many related techniques that apply to similar problems have emerged in the last 20 years (entropy compression, cluster expansion, local cut lemma...). Recently, I have introduced a counting argument that belongs to the same family of technique. This counting argument is in fact really simple to use and has already been applied to a wide variety of problems.

In this presentation, I will give a brief overview of these techniques before focusing on the counting argument. We will apply this technique to a couple of simple examples from graph theory to illustrate how it works. I will try to give a broad intuition behind a couple of more involved results that were achieved by different authors with this technique.

Problèmes d'identification dans les graphes

Florent Foucaud, LIMOS, Clermond-ferrand, florent.foucaud@uca.fr

Dans le domaine de l'identification dans les graphes, on souhaite distinguer de façon unique tous les sommets (ou arêtes) d'un graphe. De nombreux concepts existent dans cette thématique : l'identification peut être effectuée par les voisinages dans un ensemble solution, par une coloration, par des distances... Nous présenterons un échantillon de problèmes, ainsi que quelques résultats choisis. Nous évoquerons aussi des problèmes ouverts.

Extremal problems in locally sparse multigraphs

Victor Falgas–Ravry, Umeå Universitet (Suède), victor.falgas-ravry@umu.se

Say that a multigraph G is (s, q)-*sparse* if every s-set of vertices in G supports at most q edges, counting multiplicities. How large can the product of the edge multiplicities of G be if G is an (s, q)-sparse multigraph on n vertices ?

This question was posed by Mubayi and Terry in 2016, with motivation coming from hypergraph container theory. It can also be seen as a natural attempt to generalise classical results from extremal graph theory to the setting of multigraphs with bounded edge multiplicities. That one seeks to maximise a product results in some unusual features and challenges, including extremal constructions with parts containing an asymptotically transcendental proportion of the vertices.

Despite recent progress, the answer to Mubayi and Terry's question is still poorly understood for general (s, q). In this talk, I will survey the background and motivation for the study of (s, q)-sparse multigraphs, as well as the (few) know results and the (many) open problems in the area.

Références

[1] A.N. Day, V. Falgas–Ravry and A. Treglown, *Extremal problems for multigraphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **154** (2022), 1–48.

[2] V. Falgas–Ravry, *On an extremal problem for locally sparse multigraphs* preprint, arXiv ref : 2101.03056 (2023).

[3] V. Dvořák, V. Falgas–Ravry, A. Mond and V. Souza, *On transitions and generalised cycles for the Mubayi–Terry problem*, preprint (2023).

[4] D. Mubayi and C. Terry, *An extremal graph problem with a transcendental solution*, Combinatorics, Probability and Computing, **28(2)** (2021), 303–324.

Saturation d'Antichaines Induites

Paul Bastide, LaBRI, Université de Bordeaux, paul.bastide@ens-rennes.fr
Carla Groenland, TU Delft, carla.groenland@gmail.com
Hugo Jacob, ENS Paris-Saclay, hugo.jacob@ens-paris-saclay.fr
Tom Johnston, University of Bristol tom.johnston@bristol.ac.uk

L'un des ensembles partiellement ordonnés (posets) les plus étudiés est la lattice booléenne. Elle est définie comme l'ensemble des sous-ensembles de $\{1, \cdots, n\}$ ordonné par la relation d'inclusion et dénoté $2^{[n]}$ par la suite.

On étudie ici le problème de combinatoire extrémale suivant : pour un poset P et un entier n fixés, on dénote par $sat^*(n,k)$ la taille minimale d'une famille $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$, qui vérifie les deux conditions suivantes :

— $\mathcal{F}$ ne contient pas P comme sous poset induit,

— Pour tout $x \in 2^{[n]} \setminus \mathcal{F}$, la famille $\mathcal{F} \cup \{x\}$ contient P comme sous poset induit.

Une telle famille est appelée *P-saturée*. Ferrara et al. [1] ont conjecturé l'asymptotique de $sat^*(n, \mathcal{A}_k)$ où $\mathcal{A}_k$ dénote l'antichaine de taille k. Cette conjecture fut affiné plus tard par Đanković et Ivan [2] :

Conjecture 1 *Đanković et Ivan [2]* $sat^*(n, \mathcal{A}_k) = (n-1)k + O_k(1)$

En plus de valider la conjecture ci-dessus, les auteurs ont calculé la valeur exacte de $sat^*(n, \mathcal{A}_k)$.

Théorème 2 *Pour* $n \geq 6 \log k$*,*

$$sat^*(n, \mathcal{A}_k) = n(k-1) + f(k),$$

pour une fonction ***explicite*** $f(k) = O(k \log(k))$.

Références

[1] Ferrara, Michael et Kay, Bill et Kramer, Lucas et Martin, Ryan R et Reiniger, Benjamin et Smith, Heather C et Sullivan, Eric, *The saturation number of induced subposets of the Boolean lattice*, Discrete Mathematics, vol 340, n10, 2017.

[2] Đanković, Irina et Ivan, Maria-Romina, *Saturation for Small Antichains*, arXiv :2205.07392, 2022.

Le théorème de Dilworth dans les graphes temporels

Dibyayan Chakraborty, University of Leeds, d.chakraborty@leeds.ac.uk
Antoine Dailly, LIMOS, Clermont-Ferrand, antoine.dailly@uca.fr
Florent Foucaud, LIMOS, Clermont-Ferrand, florent.foucaud@uca.fr
Ralf Klasing, LaBRI, Bordeaux, ralf.klasing@labri.fr

Un graphe temporel est un graphe dont les arêtes sont étiquetées avec les moments discrets auxquels elles existent. Le graphe sous-jacent sans les étiquettes temporelles est appelé *l'empreinte* du graphe temporel. Nous considérons le problème de *couverture par chaines* dans les graphes temporels dont l'empreinte est un graphe orienté acyclique (DAG) : l'objectif est de recouvrir tous les sommets du graphe avec un nombre minimal de chaines temporelles.

Ce problème a été étudié dans les graphes classiques sous un angle algorithmique (il se résout en temps polynomial), mais également combinatoire : le théorème de Dilworth [1] sur les ensembles partiellement ordonnés implique que, dans un DAG, la taille minimale d'une couverture par chaines est égale à la taille maximale d'une antichaine (un ensemble de sommets n'étant deux à deux pas reliés par une chaine).

Nous nous intéressons aux aspects algorithmiques et combinatoires de ce problème dans les graphes temporels, et notamment à l'*égalité de Dilworth* entre les tailles minimale d'une couverture par chaines et maximale d'une antichaine. Nous obtenons les résultats suivants :

Théorème 1 *Le problème de couverture par chaines est NP-complet dans les graphes temporels dont l'empreinte est un DAG ; et il existe de tels graphes ne vérifiant pas l'égalité de Dilworth.*

Théorème 2 *Il existe un algorithme polynomial construisant une couverture par chaines de taille minimale pour les graphes temporels dont l'empreinte est un arbre orienté ; et ces graphes vérifient l'égalité de Dilworth.*

Nous démontrons le Théorème 1 en réduisant depuis 3-Dimensional Matching. Le Théorème 2 se prouve par contre-exemple minimal et l'algorithme construit en même temps l'antichaine et la couverture par chaines, ajoutant les sommets un par un et étendant une des deux structures au nouveau sommet, ce qui peut nécessiter de les modifier dans l'arbre précédent.

Références

[1] Dilworth, R. P. (1950). A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets. *Annals of Mathematics*, 51(1), 161–166.

Certification locale de propriétés locales

Nicolas Bousquet, LIRIS, Université Lyon 1, CNRS nicolas.bousquet@univ-lyon1.fr
Laurent Feuilloley, LIRIS, Université Lyon 1, CNRS laurent.feuilloley@univ-lyon1.fr
Sébastien Zeitoun, LIRIS, Université Lyon 1 sebastien.zeitoun@univ-lyon1.fr

La certification locale consiste à donner des informations (appelés *certificats*) aux sommets d'un graphe pour les aider à décider d'une propriété (globale) du graphe. Pour prendre sa décision, chaque sommet ne dispose que d'une vue locale, qui consiste en son voisinage à un rayon fixé, ainsi que les certificats des sommets dans ce voisinage. On dit que le graphe est *globalement accepté* avec une certaine assignation de certificats lorsque chaque sommet accepte.

Nous nous intéressons à la quantité minimale d'informations permettant de certifier une propriété donnée. Pour une propriété $\mathcal{P}$, on dit qu'il existe une certification locale de taille s pour certifier $\mathcal{P}$ (où s peut être une fonction de paramètres du graphe tel que le nombre de sommets n) si la propriété suivante est vérifiée : un graphe G vérifie $\mathcal{P}$ si et seulement s'il existe une assignation de certificats aux sommets de G dans $\{0, \ldots, 2^s - 1\}$ tel que G soit accepté. Ici, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la certification de propriétés *locales*, c'est-à-dire pour lesquelles la taille des certificats ne dépend pas du nombre de sommets n. Un exemple est celui de la coloration : pour certifier qu'un graphe est k-colorable, on peut donner à chaque sommet sa couleur dans une k-coloration correcte comme certificat. Chaque sommet vérifie qu'il a bien un certificat différent de celui de tous ses voisins. Cette certification triviale utilise $\log k$ bits. Nous montrons que c'est optimal si les sommets ont une vue à distance 1. Nous montrons aussi que, plus généralement, $O(\log k/d)$ bits sont nécessaires si les sommets voient à distance $d \geqslant 1$.

Nous nous sommes également intéressés à la certification d'un ensemble dominant à distance t fixée, et à l'existance d'un couplage parfait dans le graphe. Pour ces propriétés, nous donnons des bornes optimales qui dépendent soit de paramètres du problème (t pour la première) soit de paramètres du graphe autres que le nombre de sommets (Δ, le degré maximum, pour la seconde).

Trouver localement des petits ensembles dominants dans les graphes sans mineur $K_{2,t}$

Marthe Bonamy, CNRS, LaBRI, Uni. de Bordeaux, marthe.bonamy@u-bordeaux.fr
Timothé Picavet, ENS Lyon, LaBRI, Uni. de Bordeaux, timothe.picavet@u-bordeaux.fr
Alexandra Wesolek, Simon Fraser University, agwesole@sfu.ca

Le modèle $\mathcal{LOCAL}$ est un paradigme de calcul distribué où chaque sommet est considéré comme un ordinateur doté d'une puissance de calcul infinie, et où la communication se déroule de manière synchrone, c'est-à-dire que chaque ronde, chaque sommet communique simultanément avec ses voisins dans le graphe. Notre objectif principal est de résoudre le problème de l'*Ensemble Dominant Minimum* (MDS) dans le cadre du modèle $\mathcal{LOCAL}$ lorsque le nombre de rondes r est borné. Une manière équivalente de poser le problème est que chaque sommet doit décider, sans communication, s'il appartient à un MDS du graphe, en ayant connaissance du graphe jusqu'à une distance de r.

Il est bien connu [1] que, dans les graphes généraux, le MDS ne peut pas être approximé à un facteur constant en un nombre constant de rondes.

Nous étudions donc des classes de graphes plus restreintes. Bien qu'il a été montré que MDS puisse être approximé en un nombre constant de rondes sur les classes de graphes à expansion bornée [2], mais le facteur d'approximation est exponentiel en fonction de l'expansion, ce qui n'est pas optimal. Nous visons donc à établir des facteurs d'approximation beaucoup plus fins. Pour les graphes planaires-extérieurs, il est déjà connu [3] que le facteur d'approximation optimal est 5. Nous présentons la généralisation suivante :

Théorème 1 *Sur les familles de graphes sans le mineur $K_{2,t}$, il est possible d'obtenir une approximation en $(2t-1)$ de l'ensemble dominant minimal dans le modèle $\mathcal{LOCAL}$, en utilisant un nombre constant de tours.*

Références

[1] F. Kuhn, T. Moscibroda et R. Wattenhofer, *Local Computation : Lower and Upper Bounds*, J. ACM **63(2)** (2016)

[2] S. Kublenz, S. Siebertz et A. Vigny, *Constant round distributed domination on graph classes with bounded expansion*, SIROCCO 2021

[3] M. Bonamy, L. Cook, C. Groenland, et A. Wesolek. *A Tight Local Algorithm for the Minimum Dominating Set Problem in Outerplanar Graphs*, DISC 2021

Asymptotically Tight Bounds on the Time Complexity of Broadcast and its Variants in Dynamic Networks

Antoine El-Hayek, University of Vienna, antoine.el-hayek@univie.ac.at
Monika Henzinger, IST Austria, monika.henzinger@ist.ac.at
Stefan Schmid, TU Berlin, schmiste@gmail.com

Data dissemination is a fundamental task in distributed computing. This paper studies *broadcast problems* in various innovative models where the communication network connecting n processes is dynamic (e.g., due to mobility or failures) and controlled by an adversary.

In the first model, the processes transitively communicate their ids in synchronous rounds along a rooted tree given in each round by the adversary whose goal is to maximize the number of rounds until *at least one id is known by all processes*. Previous research has shown a $\lceil \frac{3n-1}{2} \rceil - 2$ lower bound and an $O(n \log \log n)$ upper bound. We show the first linear upper bound for this problem, namely $\lceil (1+\sqrt{2})n - 1 \rceil \approx 2.4n$.

We extend these results to the setting where the adversary gives in each round k-disjoint forests and their goal is to maximize the number of rounds until there is a set of k ids such that *each process knows of at least one of them*. We give a $\left\lceil \frac{3(n-k)}{2} \right\rceil - 1$ lower bound and a $\frac{\pi^2+6}{6}n + 1 \approx 2.6n$ upper bound for this problem.

Finally, we study the setting where the adversary gives in each round a directed graph with k roots and their goal is to maximize the number of rounds until *there exist k ids that are known by all processes*. We give a $\left\lceil \frac{3(n-3k)}{2} \right\rceil + 2$ lower bound and a $\lceil (1+\sqrt{2})n \rceil + k - 1 \approx 2.4n + k$ upper bound for this problem.

For the two latter problems no upper or lower bounds were previously known.

Références

[1] El-Hayek, Antoine, Monika Henzinger, and Stefan Schmid. "Asymptotically Tight Bounds on the Time Complexity of Broadcast and Its Variants in Dynamic Networks." *14th Innovations in Theoretical Computer Science Conference (ITCS 2023)*. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik, 2023.

1-extendable partition of graphs

Bergé Pierre, Université Clermont Auvergne, LIMOS, France, pierre.berge@uca.fr

Feghali Carl, CNRS, ENS de Lyon, LIP, France, carl.feghali@ens-lyon.fr

Marin Malory, ENS de Lyon, LIP, France, malory.marin@ens-lyon.fr

Watrigant Rémi, Université Claude Bernard Lyon 1, LIP, France, remi.watrigant@univ-lyon1.fr

A graph is said *1-extendable* if each of its vertices belongs to a Maximum Independent Set (MIS). This concept was introduced by Berge and is closely related to the study of well-covered graphs, originally introduced by Plummer. In the context of Wi-Fi networks, 1-extendability plays a crucial role in ensuring equitable network performance [1]. Specifically, in the conflict graph of a Wi-Fi network, the throughput of each access point is proportional to the number of Maximum Independent Sets to which its vertices belong. In simpler terms, achieving 1-extendability in the graph ensures minimal fairness.

In practice, it is possible to assign channels to each access point, resulting in a vertex partition of the conflict graph, such that each channel induces a 1-extendable graph.

In this work, we focus on the problem of partitioning a graph into the fewest possible number of 1-extendable subgraphs. We introduce a new parameter, denoted as $\chi_{\text{1-ext}}(G)$, which represents the minimum order of such a partition of the graph G. We begin by establishing some extremal properties of this parameter, particularly by demonstrating that $\chi_{\text{1-ext}}(G) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$, where n is the number of vertices in G. Next, we shift our focus to cographs, revealing that $\chi_{\text{1-ext}}(G)$ follows a more favorable upper bound of $\mathcal{O}(\log_2(n))$. Furthermore, we provide a quasi-polynomial algorithm designed to efficiently compute $\chi_{\text{1-ext}}(G)$ specifically for cographs.

Références

[1] Pierre Bergé, Anthony Busson, Carl Feghali, and Rémi Watrigant, *1-extendability of independent sets.* In Cristina Bazgan and Henning Fernau, editors, *Combinatorial Algorithms*, pages 172–185, Cham, 2022. Springer International Publishing.

Diamètre-t coloration de graphes

Quentin Chuet, LISN, Université Paris-Saclay, quentin.chuet@lisn.fr
François Pirot, LISN, Université Paris-Saclay, francois.pirot@lisn.fr

Une diamètre-t coloration est une coloration (impropre) des sommets d'un graphe telle que chaque composante monochromatique est de diamètre au plus t. Pour un entier t fixé, on étudie les bornes extrémales sur le nombre de couleurs requises dans une telle coloration en fonction de n, le nombre de sommets.

Lorsque $t = 0$, il s'agit d'une coloration propre. On peut trivialement observer que n couleurs suffisent, et sont nécéssaires pour le graphe complet.

Lorsque $t = 1$, il s'agit d'une *sous-coloration*, notion introduite dans [1]. Par des bornes élémentaires sur les nombres de Ramsey, on peut déduire que $\mathcal{O}(\frac{n}{\log n})$ suffisent. L'analyse du graphe aléatoire $\mathbf{G}(n, \frac{1}{2})$ donne la confirmation que cette borne est atteinte à une constante multiplicative près [2].

Dans cet exposé, on considère le cas $t = 2$. On montre que $\sqrt{n}$ couleurs suffisent, et que cette borne est atteinte à un facteur $\mathcal{O}(\log n)$ près via l'analyse du *line-graph* de $\mathbf{G}(n, \frac{1}{2})$.

Références

[1] M.O. Albertson, R.E. Jamison, S.T. Hedetniemi, S.C. Locke. *The subchromatic number of a graph.* Annals of Discrete Mathematics, 1989, vol. 39, p. 33–49.

[2] H. Broersma, F.V. Fomin, J. Nešetřil, G.J. Woeginger. *More about subcolorings.* Computing, 2002, vol. 69, no 3, p. 187–203.

A note on interval colourings of graphs

Maria Axenovich, Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe, Germany
António Girão, Mathematical Institute, University of Oxford, UK
Lawrence Hollom, DPMMS, University of Cambridge, UK
Julien Portier, DPMMS, University of Cambridge, UK
Emil Powierski, Mathematical Institute, University of Oxford, UK
Michael Savery, Mathematical Institute, University of Oxford, UK
Youri Tamitegama, Mathematical Institute, University of Oxford, UK
Leo Versteegen, DPMMS, University of Cambridge, UK

A graph is said to be *interval colourable* if it admits a proper edge-colouring using palette $\mathbb{N}$ in which the set of colours incident to each vertex is an interval. This definition was first introduced by Asratian and Kamalian in 1987 and has close relationships with scheduling problems in theoretical computer science. The *interval colouring thickness* of a graph G is the minimum k such that G can be edge-decomposed into k interval colourable graphs. We show that $\theta(n)$, the maximum interval colouring thickness of an n-vertex graph, satisfies $\theta(n) = \Omega(\log(n)/\log\log(n))$ and $\theta(n) \leq n^{5/6+o(1)}$, which improves on the trivial lower bound and an upper bound of the first author and Zheng. As a corollary, we answer a question of Asratian, Casselgren, and Petrosyan and disprove a conjecture of Borowiecka-Olszewska, Drgas-Burchardt, Javier-Nol, and Zuazua. We also confirm a conjecture of the first author that any interval colouring of an n-vertex planar graph uses at most $3n/2 - 2$ colours. We will then discuss further results and directions of work.

Tough graphs and Hamiltonian degree conditions

Chinh T. Hoàng, Wilfried Laurier University, choang@wlu.ca
Cléophée Robin, Greyc Caen, cleophee.robin@unicaen.fr

A graph G is *Hamiltonian* if there exists a cycle in G containing all vertices of G. A graph G is *t-tough* if, for all subsets of vertices S, the number of connected components in $G \setminus S$ is at most $|S|/t$.

In 1995, Hoàng conjectured the following.

Conjecture 1 (Hoàng ([1])) *Let G be a graph with degree sequence $d_1, d_2, \ldots, d_n$ and let t be a positive integer.*

If G is t-tough and if, for all i such that $t \leq i < n/2, d_i \leq i$ $d_{n-i+t \leq n-i}$ then G is Hamiltonian.

He proved that conjecture 1 is true for $t \leq 3$. We proved that it is true for $t \leq 6$. To do this, we extended into a version for t-tough graphs, the closure lemma due to Bondy and Chvàtal.

Références

[1] C. T. Hoàng, *Hamiltonian degree conditions for tough graphs*, Discrete Mathematics, 142(1-3) (1995) 121—139.

Bornes de type Caro-Wei pour les forêts linéaires induites

Gwenaël Joret, Université libre de Bruxelles, gwenael.joret@ulb.be
Robin Petit, Université libre de Bruxelles, robin.petit@ulb.be

En 1979 et 1981, Caro [1] et Wei [2] ont démontré indépendamment un résultat qui porte leur nom et qui précise que tout graphe G admet un ensemble indépendant de taille au moins $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v)+1}$.

En 1987, Alon, Kahn et Seymour [3] ont généralisé ce résultat en montrant qu'il était possible de trouver un sous-graphe induit k-dégénéré de taille au moins $\sum_{v \in V(G)} \min\left\{1, \frac{k+1}{d(v)+1}\right\}$. En particulier, pour $k = 0$, ce résultat se réduit au théorème de Caro-Wei. Pour $k = 1$, si nous supposons que G n'a pas de sommet isolé, ce résultat énonce qu'il existe une forêt induite de taille au moins deux fois la borne de Caro-Wei : $\sum_{v \in V(G)} \frac{2}{d(v)+1}$.

Récemment, Akbari, Amanihamedani, Mousavi et Nikpey [4] ont montré que si le graphe G est régulier, alors ce dernier admet une forêt linéaire induite satisfaisant cette même borne. Une forêt est *linéaire* si toutes ses composantes connexes sont des chemins. Cette borne inférieure n'est plus vraie si on enlève l'hypothèse de régularité, comme le montre par exemple $K_{1,3}$. Cependant, les contre-exemples connus ont tous des sommets de degré 1, ce qui a amené les auteurs de [4] à conjecturer que, si G a degré minimum au moins 2, alors G contient une forêt linéaire induite de taille au moins $\sum_{v \in V(G)} \frac{2}{d(v)+1}$. Notre résultat principal est une preuve de cette conjecture.

Si les sommets de degré 1 sont permis, nous montrons qu'il existe une infinité de fonctions extrémales ("meilleures possibles") $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que tout graphe G contient une forêt linéaire induite de taille au moins $\sum_{v \in V(G)} f(d(v))$, et nous en donnons une caractérisation complète.

Références

[1] Y. Caro, *New results on the independence number*, Technical Report, Tel-Aviv University (1979).

[2] V. K. Wei, *A lower bound on the stability number of a simple graph*, Technical Report, Bell Laboratories (1981)

[3] N. Alon, J. Kahnn and P. D. Seymour, *Large induced degenerate subgraphs*, Graphs and Combinatorics, 3 :203-211 (1987)

[4] S. Akbari, A. Amanihamedani, S. Mousavi, and H. Nikpey, *On the maximum order of induced paths and induced forests in regular graphs*, arXiv preprint arXiv :1911.02332 (2019).

Plongement aléatoire d'arbres de degré borné

Paul Bastide, LaBRI, Bordeaux,paul.bastide@labri.fr
Clément Legrand-Duchesne,LaBRI, Bordeaux, clement.legrand@labri.fr
Alp Müyesser, University College London, UK, alp.muyesser.21@ucl.ac.uk

Une question récurrente en combinatoire extrémale est la suivante : Étant donné un graphe H fixé, quelle est la valeur minimale de δ_n telle que tout graphe G, avec n sommets et de degré minimum $\delta(G) \geq \delta_n$, contient une copie d'un graphe H fixé. Un des premiers résultats du domaine est le théorème de Dirac : Tout graphe G tel que $\delta(G) \geq \frac{|G|}{2}$ est hamiltonien.

De multiples variations de cette question sont possibles :

Question 1 *Si $\delta(G) \geq \delta_n$, combien de copies de H le graphe G contient-il ?*

Question 2 *Quelle est la valeur de p_n pour laquelle $G(n, p_n)$ contient une copie de H avec probabilité $\frac{1}{2}$?*

Question 3 *Quelle est la valeur de p_n telle que pour tout graphe G avec $\delta(G) \geq \delta_n$, si chaque arête de G est conservée avec probabilité p_n, le graphe obtenu contient encore une copie de H avec probabilité $\frac{1}{2}$?*

Dans le cas des arbres couvrants, Komlós, Sárközy et Szemerédi ont prouvé en avec n suffisament grand et $\delta(G) \geq (\frac{1}{2} + \alpha)n$, contient chaque arbre de degré au plus Δ avec n sommets ; avant de généraliser ce résultat aux arbres de degrés au plus $\frac{n}{\log n}$ en 2001 (résultat optimal à un facteur multiplicatif près). Montgomery a prouvé en 2019 que $G(n, O_\Delta(\frac{\log n}{n}))$ contient une copie de chaque arbre de degré au plus Δ avec n sommets avec bonne probabilité.

Alors que ces trois questions étaient jusqu'ici étudiées séparément, de récents progrès sur la conjecture de Kahn-Kalai ont permis à Pham, Sah, Sawhney et Simkin[1] d'utiliser des distributions dites "$O(\frac{1}{n})$-étalées" sur les plongements de H dans G, pour répondre à ces trois questions simultanément.

Notre contribution consiste en une autre distribution $O(\frac{1}{n})$-étalée sur les arbres de degré maximum Δ. Contrairement à celle de Pham *et al.*, notre construction n'utilise ni lemme de régularité ni le *blow-up lemma*, résultant ainsi en une preuve plus courte, moins *ad-hoc*, généralisable aux digraphes et aux hyper-graphes, et avec de bien meilleures constantes.

Références

[1] H. T. Pham and A. Sah and M. Sawhney and M. Simkin, *A Toolkit for Robust Thresholds*, arXiv :2210.03064 (2023).

Couvrez vite ces cycles que je ne saurais voir.

Gaétan Berthe, LIRMM, Université de Montpellier gaetan.berthe@lirmm.fr
Marin Bougeret, LIRMM, Université de Montpellier, CNRS marin.bouget@lirmm.fr
Daniel Gonçalves, LIRMM, Université de Montpellier, CNRS daniel.goncalves@lirmm.fr
Jean-Florent Raymond, LIMOS, Université Clermont Auvergne, CNRS jean-florent.raymond@cnrs.fr

Nous étudions l'existence d'algorithmes paramétrés sous-exponentiels pour trois problèmes de couverture de cycles dans des classes de graphes géométriques. Les problèmes considérés demandent s'il existe dans un graphe G un ensemble X d'au plus k sommets tels que $G - X$ est, respectivement, sans triangle, sans cycle, ou biparti. Des algorithmes paramétrés sous-exponentiels pour ces cas sont déjà connus dans les graphes planaires et même dans les graphes excluant un mineur fixé, grâce à la théorie de la bidimensionnalité [Demaine *et al.*, JACM 2005]. De plus, il existe une ligne récente de travaux qui étend ces résultats aux classes de graphes géométriques d'intersections d'objets «épais» [Lokshtanov *et al.*, SODA 2022].

Cet exposé s'intéresse aux objets «fins» en considérant les graphes d'intersection de segments dans le plan avec d pentes possibles (graphes d-DIR) et les graphes de contact de segments dans le plan. En supposant ETH, nous excluons l'existence d'algorithmes resolvant le problème de la couverture des cycles en temps $2^{o(n)}$ dans les graphes 2-DIR.

Ce résultat indique que des restrictions supplémentaires sont nécessaires pour obtenir des algorithmes paramétrés sous-exponentiels. Entre autres résultats, nous décrivons un algorithme en temps $2^{\mathcal{O}(k^{3/4}\log k)}n^{\mathcal{O}(1)}$ pour le problème de la couverture des cycles ou des triangles dans les graphes de contact de segments.

Preprint disponible sur arXiv : https://arxiv.org/abs/2306.17710 .

Recognizing unit multiple interval graphs is hard

Virginia Ardévol Martínez, LAMSADE, Université Paris-Dauphine
Romeo Rizzi, University of Verona
Florian Sikora, LAMSADE, Université Paris-Dauphine
Stéphane Vialette, LIGM, Univ Gustave Eiffel

Multiple interval graphs are a well-known generalization of interval graphs introduced in the 1970s to deal with situations arising naturally in scheduling and allocation. A d-interval is the union of d intervals on the real line, and a graph is a d-interval graph if it is the intersection graph of d-intervals. In particular, it is a unit d-interval graph if it admits a d-interval representation where every interval has unit length.

Whereas it has been known for a long time that recognizing 2-interval graphs and other related classes such as 2-track interval graphs is NP-complete [1, 2], the complexity of recognizing unit 2-interval graphs remains open. Here, we settle this question by proving that the recognition of unit 2-interval graphs is also NP-complete. Our proof technique uses a completely different approach from the other hardness results of recognizing related classes. Furthermore, we extend the result for unit d-interval graphs for any $d \geq 2$, which does not follow directly in graph recognition problems –as an example, it took almost 20 years to close the gap between $d = 2$ and $d > 2$ for the recognition of d-track interval graphs. Our result has several implications, including that recognizing $(x, \ldots, x)$ d-interval graphs and depth r unit 2-interval graphs is NP-complete for every $x \geq 11$ and every $r \geq 4$. The main results are summarized below.

Théorème 1 *Recognizing unit d-interval graphs is NP-complete for every* $d \geq 2$.

Corollaire 2 *Recognizing* $(x, \ldots, x)$ *d-interval graphs and depth r unit 2-interval graphs is NP-complete for every* $x \geq 11$ *and every* $r \geq 4$.

Références

[1] Douglas B. West and David B. Shmoys, *Recognizing graphs with fixed interval number is NP-complete*, Disrecte Appl. Math., 8 :295–305, 1984.

[2] András Gyárfás and Douglas West, *Multitrack interval graphs*, Congressus Numerantium, pages 109–116, 1995.

Graphes mineur-universels pour les graphes plongés sur des surfaces

Cyrille Gavoille, LaBRI, Université de Bordeaux, gavoille@labri.fr
Claire Hilaire, Famnit, Univ. of Primorska, claire.hilaire@famnit.upr.si

Nous montrons dans [1] que pour tout n et toute surface Σ (orientable ou non), il existe un graphe U plongeable sur Σ avec au plus cn^2 sommets, tel que U admet pour mineur tous les graphes d'au plus n sommets plongeables sur Σ. La constante c dépend polynomialement du genre Eulérien de Σ.

Ceci généralise le célèbre théorème pour les planaires de Robertson, Seymour et Thomas [2], qui dit que la grille carré à $4n^2$ sommets admets comme mineur tous les planaires à au plus n sommets.

Références

[1] C. Gavoille and C. Hilaire *Minor-Universal Graph for Graphs on Surfaces*, Tech. Rep. 2305.06673, arXiv, (2023).

[2] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, *Quickly Excluding a Planar Graph.*, J. Comb. Theory B **62** (1994), 323–348.

Construction de graphes universels via des réseaux de tri

Joseph Hyde, University of Victoria, josephhyde@uvic.ca
Natasha Morrison, University of Victoria, nmorrison@uvic.ca
Alp Müyesser, University College London, alp.muyesser.21@ucl.ac.uk
Matias Pavez-Signé, University of Warwick, matias.pavez-signe@warwick.ac.uk

Johanssen, Krivelevich et Samotij ont posé la question suivante. Supposons qu'on veuille construire un graphe peu dense qui contient tous les arbres de degré borné avec n sommets. Peut-on le faire sans construire un seul triangle ? Les graphes pseudo-aléatoires sont de bons candidats pour cette construction. Un (n, d, λ)-graphe est un graphe d-régulier G avec n sommets, où λ est un paramètre qui mesure à quel point les arêtes sont bien distribuées. Plus λ est bas, plus G est pseudo-aléatoire, et plus il devient facile de trouver des arbres dans G. Alon, Krivelevich, et Sudakov ont demandé si il était possible de déterminer la plus haute valeur de λ (pour d et n fixés) nécessaire pour qu'un (n, d, λ)-graphe contienne tous les arbres de degré borné avec n sommets. Les auteurs montrent que la condition $\lambda \leq d/\log^3 n$ est suffisante. Ce résultat est optimal à un facteur polylogarithmique près. Par ailleurs, ce résultat confirme qu'une famille connues de graphes pseudo-aléatoires sans triangles est universel pour tous les arbres de degré borné. Cela nous permet de répondre par l'affirmative à la question de Johanssen, Krivelevich et Samotij.

Notre preuve repose essentiellement sur le concept de réseaux de tri, qui est un concept clé de l'informatique. On démontre que les graphes suffisamment pseudo-aléatoires contiennent un sous-graphe qui peut "simuler" un réseau de tri avec un petit profondeur. Cette technique pourrait avoir d'autres applications dans la théorie des graphes universels.

Graphes universels isométriques

François Dross, LaBRI, U. Bordeaux, francois.dross@labri.fr
Cyril Gavoille, LaBRI, U. Bordeaux, gavoille@labri.fr
Edgar Baucher, LaBRI, U. Bordeaux, edgar.baucher@labri.fr

Soient G et H deux graphes, on dit que G est une *sous-graphe isométrique* de H si on peut projeter G en tant que sous-graphe de H en conservant les distances entre les sommets de G dans cette projection.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de graphe. Un graphe universel isométrique U de $\mathcal{F}$ est un graphe qui contient tous les graphes de $\mathcal{F}$ en tant que sous-graphe isométrique. Ces types de graphes sont des cas particuliers des *schémas d'étiquetages des distances*, qui sont des moyens d'étiqueter des sommets d'un graphe pour qu'il soit possible de calculer la distance entre deux sommets du graphe juste en connaissant leurs étiquettes (indépendamment du graphe) [1].

Les graphes universels isométriques étant des objets à ce jour peu étudiés dans la recherche, cet exposé vise à les présenter, ainsi qu'à montrer certaines de leurs propriétés. Le principal résultat est l'établissement de la condition exacte qui détermine si un schéma d'étiquetage des distances est équivalent à un graphe universel isométrique. Ce résultat offre une autre manière de concevoir les schémas d'étiquetage des distances, qui sont des objets bien plus étudiés dans la recherche.

Références

[1] L.Esperet, C. Gavoille , C. Groenland, *Isometric Universal Graphs*, Siam J. Discrete Math Vol. 35, No. 2, pp. 1224–1237.

k-vertex-minor-universal graphs and small k-pairable quantum states

Nathan Claudet, Inria Mocqua, LORIA, CNRS, Université de Lorraine, F-54000 Nancy, France, nathan.claudet@inria.fr

Mehdi Mhalla, Université Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LIG, F-38000 Grenoble, France mehdi.mhalla@univ-grenoble-alpes.fr

Simon Perdrix, Inria Mocqua, LORIA, CNRS, Université de Lorraine, F-54000 Nancy, France, simon.perdrix@loria.fr

A k-pairable n-qubit quantum state is a resource state that allows Local Operations and Classical Communication (LOCC) protocols to generate EPR-pairs among any k-disjoint pairs of the n qubits. Bravyi et al. introduced a family of k-pairable n-qubit states, where n grows exponentially with k [1]. Our primary contribution is to establish the existence of 'small' pairable quantum states, by highlighting a sufficient condition on a graph for the corresponding graph state to be k-pairable. Specifically, we present a family of k-pairable n-qubit graph states, where n is polynomial in k, namely $n = O(k^3 \ln^3 k)$. Our construction relies on probabilistic methods.

Furthermore, we prove that the pairability of a graph state is at most half of the minimum degree up to local complementation of the underlying graph, i.e., $k(|G\rangle) \leq \lceil \delta_{loc}(G)/2 \rceil$.

We also investigate the related combinatorial problem of k-vertex-minor-universality : a graph G is k-vertex-minor-universal if any graph on any k of its vertices is a vertex-minor of G. When a graph is $2k$-vertex-minor-universal, the corresponding graph state is k-pairable. More precisely, one can create not only EPR-pairs but also any graph state on any $2k$ qubits through local operations and classical communication. We establish the existence of k-vertex-minor-universal graphs of order $O(k^4 \ln k)$.

This talk is based on [2].

Références

[1] S. Bravyi, Y. Sharma, M. Szegedy, and R. De Wolf, *Generating k EPR-pairs from an n-party resource state*, QIP2023, arXiv :2211.06497 (2022)

[2] N. Claudet, M. Mhalla and S. Perdrix, *Small k-pairable states*, arXiv (2023)

Elementary first-order model checking for sparse graphs

Jakub Gajarský, University of Warsaw, Poland, gajarsky@mimuw.edu.pl
Michał Pilipczuk, University of Warsaw, Poland, michal.pilipczuk@mimuw.edu.pl
Marek Sokołowski, University of Warsaw, Poland, marek.sokolowski@mimuw.edu.pl
Giannos Stamoulis, University of Warsaw, Poland, giannos95@gmail.com
Szymon Toruńczyk, University of Warsaw, Poland, szymtor@mimuw.edu.pl

It is known that for subgraph-closed graph classes the first-order model checking problem is fixed-parameter tractable if and only if the class is nowhere dense [2]. However, the dependency on the formula size is non-elementary, and in fact, this is unavoidable even for the class of all trees [1]. On the other hand, it is known that the dependency is elementary for classes of bounded degree as well as for classes of bounded pathwidth [3]. In this paper we generalise these results and almost completely characterise subgraph-closed graph classes for which the model checking problem is fixed-parameter tractable with an elementary dependency on the formula size. Those are the graph classes for which there exists a number d such that for every r, some tree of depth d and size bounded by an elementary function of r is avoided as an $(\leq r)$-subdivision in all graphs in the class. In particular, this implies that if the class in question excludes a fixed tree as a topological minor, then first-order model checking for graphs in the class is fixed-parameter tractable with an elementary dependency on the formula size.

Références

[1] Markus Frick and Martin Grohe, *The complexity of first-order and monadic second-order logic revisited*, Annals of Pure and Applied Logic, **130(1-3)** (2004), 3–31.

[2] Martin Grohe, Stephan Kreutzer, and Sebastian Siebertz, *Deciding first-order properties of nowhere dense graphs*, J. ACM, **64(3)** (2017), 17 :1–17 :32.

[3] Michael Lampis, *First Order Logic on Pathwidth Revisited Again*, Proc. of the 50th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2023), volume 261 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 132 :1–132 :17, Dagstuhl, Germany, 2023. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik.

Complexité de l'énumération des séparateurs minimaux pour l'inclusion

Caroline Brosse, LIMOS, Université Clermont Auvergne, `caroline.brosse@uca.fr`
Oscar Defrain, LIS, Aix-Marseille Université, `oscar.defrain@lis-lab.fr`
Kazuhiro Kurita, Université de Nagoya, Aichi, Japon
Vincent Limouzy, LIMOS, Université Clermont Auvergne, `vincent.limouzy@uca.fr`
Takeaki Uno, NII, Tokyo, Japon
Kunihiro Wasa, Université de Hosei, Tokyo, Japon

Un séparateur d'un graphe est un ensemble de sommets qui, s'il est supprimé, déconnecte le graphe. Nous nous intéressons ici aux séparateurs minimaux pour l'inclusion, c'est-à-dire tels que tout sous-ensemble strict ne déconnecte pas le graphe. Plus particulièrement, on cherche à savoir s'il est possible de générer efficacement la liste de tous les séparateurs minimimaux pour l'inclusion d'un graphe donné. Un algorithme résolvant ce problème rapidement serait d'un grand intérêt pratique pour le calcul de paramètres de graphes liés à la décomposition arborescente (*treewidth* ou *treedepth*), en témoigne l'édition 2020 du challenge PACE dédiée au calcul de la *treedepth.*

Dans un graphe quelconque, il peut y avoir un grand nombre de séparateurs minimaux pour l'inclusion, et même un nombre exponentiel en la taille du graphe. Mesurer l'efficacité en termes de la taille de l'entrée seulement conduit donc naturellement à construire un algorithme exponentiel. Cependant, afin de mesurer un peu plus finement l'efficacité d'un algorithme d'énumération, on peut prendre en compte le nombre de solutions à retourner. Ainsi, nous cherchons à savoir s'il est possible de générer tous les séparateurs minimaux pour l'inclusion en un temps qui dépend polynomialement à la fois de la taille de l'entrée et du nombre de solutions. Cette question a été laissée ouverte par Kloks et Kratsch en 1998, et nous lui donnons à présent une réponse négative [1]. À l'aide d'une réduction polynomiale à un problème de satisfiabilité, nous montrons le théorème suivant.

Théorème 1 ([1]) *Si* $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$*, il n'existe pas d'algorithme permettant d'énumérer les séparateurs minimaux pour l'inclusion d'un graphe en temps polynomial en la taille de l'entrée et en le nombre de solutions.*

Références

[1] C. Brosse, O. Defrain, K. Kurita, V. Limouzy, T. Uno et K. Wasa, *On the hardness of inclusion-wise minimal separators enumeration*, arXiv preprint `arXiv:2308.15444`, 2023.

Décroiser des graphes sur des surfaces

Éric Colin de Verdière, LIGM, CNRS, Université Gustave Eiffel, Marne-la-Vallée, `eric.colin-de-verdiere@univ-eiffel.fr`

Vincent Despré, Université de Lorraine, CNRS, Inria, LORIA, Nancy, `vincent.despre@inria.fr`

Loïc Dubois, LIGM, Université Gustave Eiffel, CNRS, Marne-la-Vallée, `loic.dubois@univ-eiffel.fr`

Prenons un graphe dessiné sur une surface (par example, le plan privé d'un nombre fini de points servant d'obstacles), possiblement avec des croisements. Nous fournissons un algorithme pour décider si un tel dessin est décroisable, c'est à dire s'il est possible de faire glisser les sommets et les arêtes du graphe sur la surface (en évitant les obstacles) afin d'éliminer tous les croisements ; en d'autres mots, si le dessin est homotope à un plongement. Le problème se résume à un test de planarité lorsque la surface est la sphère ou le disque (de façon équivalente, le plan sans obstacle) mais les autres cas n'ont jamais été étudiés auparavant, à l'exception du cas où le graphe d'entrée est un cycle, pour lequel on trouvera une littérature abondante en topologie, et même plus récemment un algorithme quasi-linéaire de Despré et Lazarus.

Notre algorithme termine en temps $O(m + poly(g + b)n \log n)$, où $g \geq 0$ et $b \geq 0$ sont le genre et le nombre de bords de la surface orientable S et où n est la taille du dessin, dessin qui est réalisé sur un autre graphe de taille m cellulairement plongé sur S. Nous utilisons différentes techniques de la topologie algorithmique en dimension deux et de la théorie des surfaces hyperboliques. Nous introduisons les triangulations réduisantes, un nouvel analogue discret des surfaces hyperboliques dans l'esprit des systèmes de quads de Lazarus et Rivaud, et de Erickson et Whittlesey, qui ont le bénéfice supplémentaire d'admettre des chemins réduits à la fois uniques et stables par passage à l'inverse ; ces triangulations sont un apport indépendant du papier. De fines structures de données sont nécessaires pour réaliser certains tests d'homotopie sur ces triangulations. Nous utilisons comme routine essentielle un algorithme de Akitaya, Fulek et Tóth.

A Structural Approach to Tree Decompositions of Knots and Spatial Graphs

Corentin Lunel, LIGM, Univ. Gustave Eiffel
corentin.lunel2@univ-eiffel.fr
Arnaud de Mesmay, LIGM, Univ. Gustave Eiffel
arnaud.de-mesmay@univ-eiffel.fr

Knots are commonly represented and manipulated via diagrams, which are decorated planar graphs. When such a knot diagram has low treewidth, parameterized graph algorithms can be leveraged to ensure the fast computation of many invariants and properties of the knot. It was recently proved that there exist knots which do not admit any diagram of low treewidth, and the proof relied on intricate low-dimensional topology techniques.
In this work, we initiate a thorough investigation of tree decompositions of knot diagrams (or more generally, diagrams of spatial graphs) using ideas from structural graph theory. We define an obstruction on spatial embeddings that forbids low tree width diagrams, and we prove that it is optimal with respect to a related width invariant. We then show the existence of this obstruction for knots of high representativity, which include for example torus knots, providing a new and self-contained proof that those do not admit diagrams of low treewidth. This last step is inspired by a result of Pardon on knot distortion.

Diviser n'est pas régner ?

Laurent Lyaudet, docteur sans affiliation, laurent.lyaudet@gmail.com

Dans les schémas « Diviser pour régner », une bonne division de l'instance d'un problème algorithmique peut donner un algorithme de résolution efficace. Découvrons une décomposition basée sur le principe de première différence[Sierpiński(1932)] pris sur un arbre[Lyaudet(2019)] et non une suite, qui permet de décomposer tous les graphes de degré borné en temps quasi-linéaire. Donc si $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, alors « Diviser n'est pas régner. ».

Soit un ens. V, une (V, k)-*suite-d'applications* est une suite d'app. de V vers les sommets de graphes de cardinalité au plus k.

Définition 1 *Soit $G = (V_G, E_G)$ un graphe. Une (k, α, β)-*décomposition arborescente questionnable bijective *de G est un triplet (A, ef, en) (A arbre binaire enraciné, ef, resp. en, fonction d'étiquetage des feuilles, resp. nœuds) : les feuilles de A sont en bijection, par la fonction ef, avec V_G ; ainsi à chaque nœud interne ν est associé le sous-ens. de V_G union des valeurs $ef(f)$ pour toutes les feuilles f sous le nœud ν, définissant $ef(\nu)$; en est une app. de domaine les nœuds internes de A, telle que $en(\nu)$ est une $(ef(\nu), k)$-suite-d'app. ; donc, $\forall x \in V_G$ correspond un sous-arbre/chemin de A, et puisque l'intersection de deux chemins est un chemin, on a un chemin correspondant à tout couple de sommets (x, y). On peut ainsi définir la $(\{x, y\}, k)$-suite-d'app. obtenue en concaténant les $(ef(\nu), k)$-suites-d'app. restreintes à $\{x, y\}$, et l'on impose que la première différence entre l'image de x et de y dans cette suite d'app. existe et qu'elle corresponde à deux sommets adjacents, resp. non-adjacents, si x et y sont adjacents, resp. non-adjacents ; α, resp. β, est la profondeur de l'arbre A, resp. de l'arbre étendu A' obtenu en remplaçant chaque nœud interne ν par un chemin de nœuds (un pour chaque app. de la suite associée à ν), on les appelle resp. profondeur structurelle et logique de la décomposition. k est appelée la largeur de la décomposition.*

Cette définition est très puissante puisque tout est décomposable avec une largeur de 2 et une profondeur linéaire. Même en se restreignant aux décompositions équilibrées, pour lesquelles α est dans $O(\log |V_G|)$, on montre :

Théorème 1 (Décomposition des graphes de degré borné) *Tout graphe de degré au plus d à n sommets admet une décomposition arborescente questionnable bijective équilibrée de largeur 2, de profondeur structurelle au plus $\lceil \lg(n) \rceil + d^2$ et de profondeur logique au plus $\lceil \lg(n) \rceil + d^2 \times (\lceil \lg(n) \rceil + 1) = \lceil \lg(n) \rceil \times (1 + d^2) + d^2$. De plus, cette décomposition est calculable en temps quasi-linéaire.*

Références

[Lyaudet(2019)] L. Lyaudet. On finite width questionable representations of orders. *CoRR*, abs/1903.02028, 2019. URL `http://arxiv.org/abs/1903.02028`.

[Sierpiński(1932)] W. Sierpiński. Généralisation d'un théorème de Cantor concernant les ensembles ordonnés dénombrables. *Fundamenta Mathematicae*, 18 :280–284, 1932.

Dynamic programming on bipartite tree decompositions

Lars Jaffke, Department of Informatics, University of Bergen, lars.jaffke@uib.no
Laure Morelle, LIRMM, Université de Montpellier, laure.morelle@lirmm.fr
Ignasi Sau, LIRMM, Université de Montpellier, ignasi.sau@lirmm.fr
Dimitrios M. Thilikos, LIRMM, Université de Montpellier, sedthilk@thilikos.info

We revisit a graph width parameter that we dub *bipartite treewidth*, along with its associated graph decomposition that we call *bipartite tree decomposition.* Bipartite treewidth can be seen as a common generalization of treewidth and the odd cycle transversal number.

Intuitively, a bipartite tree decomposition is a tree decomposition whose bags induce almost bipartite graphs and whose adhesions contain at most one vertex from the bipartite part of any other bag, while the width of such decomposition measures how far the bags are from being bipartite.

Adapted from a tree decomposition originally defined by Demaine, Hajiaghayi, and Kawarabayashi [SODA 2010] and explicitly defined by Tazari [Theor. Comput. Sci. 2012], bipartite treewidth appears to play a crucial role for solving problems related to *odd-minors*, which have recently attracted considerable attention.

As a first step toward a theory for solving these problems efficiently, we develop dynamic programming techniques to solve problems on graphs of small bipartite treewidth. For such graphs, we provide a number of para-NP-completeness results, FPT-algorithms, and XP-algorithms, as well as several open problems. In particular, we show that K_t-Subgraph-Cover, Weighted Vertex Cover/Independent Set, Odd Cycle Transversal, and Maximum Weighted Cut are FPT parameterized by bipartite treewidth. We also provide the following complexity dichotomy when H is a 2-connected graph, for each of the H-Subgraph-Packing, H-Induced-Packing, H-Scattered-Packing, and H-Odd-Minor-Packing problems : if H is bipartite, then the problem is para-NP-complete parameterized by bipartite treewidth while, if H is non-bipartite, then the problem is solvable in XP-time.

Le théorème du mineur grille revisité

Vida Dujmović, University of Ottawa, Ottawa, Canada
Robert Hickingbotham, Monash University, Melbourne, Australia
Jędrzej Hodor, Jagiellonian University, Kraków, Poland
Gwenaël Joret, Université libre de Bruxelles, Belgium
Hoang La, Jagiellonian University, Kraków, Poland
Piotr Micek, Jagiellonian University, Kraków, Poland
Pat Morin, Carleton University, Ottawa, Canada
Clément Rambaud, Université Côte d'Azur, I3S, INRIA, Sophia Antipolis, `clement.rambaud@inria.fr`
David R. Wood, Monash University, Melbourne, Australia

Le théorème du mineur grille, démontré par Robertson et Seymour [1], affirme que pour tout graphe planaire X, il existe une constante c telle que tout graphe excluant X comme mineur a treewidth au plus c. Nous montrons le résultat suivant, qui améliore qualitativement ce théorème.

Théorème 1 *Pour tout graphe planaire X, il existe un entier c tel que pour tout graphe G dont X n'est pas mineur, il existe un graphe H de treewidth au plus $2^{\mathrm{td}(X)+1} - 4$ tel que $G \subseteq H \boxtimes K_c$.*

De plus, la treedepth (notée td) est le bon paramètre dans le sens suivant. Si h, c sont des entiers tel que tout graphe dont X n'est pas mineur est sous-graphe de $H \boxtimes K_c$ pour un graphe H de treewidth au plus h, alors $h \geq \mathrm{td}(X) - 2$.

Nous démontrons également par une méthode similaire la borne suivante sur les weak coloring numbers.

Théorème 2 *Il existe une fonction g telle que pour tout graphe X, il existe un entier c tel que pour tout graphe G dont X n'est pas mineur, et pour tout entier positif r,*

$$\mathrm{wcol}_r(G) \leq c \cdot r^{g(\mathrm{td}(X))}.$$

Références

[1] Neil Robertson and Paul Seymour. Graph minors. V. Excluding a planar graph. *J. Combin. Theory, Series B*, 41(1) :92–114, 1986.

[2] Vida Dujmović, Robert Hickingbotham, Jędrzej Hodor, Gweanël Joret, Hoang La, Piotr Micek, Pat Morin, Clément Rambaud, and David R. Wood. The grid-minor theorem revisited. *arXiv preprint arXiv :2307.02816*, 2023.

The structure of quasi-transitive graphs avoiding a minor with applications to the Domino Conjecture

Louis Esperet, G-SCOP, Université Grenoble Alpes, louis.esperet@grenoble-inp.fr
Ugo Giocanti, G-SCOP, Université Grenoble Alpes, ugo.giocanti@grenoble-inp.fr
Clément Legrand-Duchesne, LABRI, Université de Bordeaux,
clement.legrand@u-bordeaux.fr

An infinite graph is quasi-transitive if the action of its automorphism group on its vertex set has finitely many orbits. Roughly speaking, this means that the graph has a lot of symmetries. Starting with the work of Maschke (1896), a lot of work have been done on the structure of planar Cayley graphs, and more generally of planar quasi-transitive graphs. On the opposite, only few research has been done about the more general class of minor-excluded quasi-transitive graphs. In this talk, I will present a structure theorem for such graphs, which is reminiscent of the Robertson-Seymour Graph Minor Structure Theorem. The proof of our result is mainly based on a combination of the work of Thomassen (1992) together with an extensive study of Grohe (2016) on the properties of separations of order 3 in finite graphs. Our proof involves some technical notions from structural graph theory and I will spend some time to present some of the key concepts involved and especially how they must be adapted to take into account the symmetries of the studied graph. Eventually I will explain how such a result can be used to prove the so called *domino problem conjecture* for minor-excluded groups, extending previous results from Berger (1966) and Aubrun, Barbieri and Moutot (2019). I will also spend time to present other applications both at the group and at the graph level.

Reconfiguration of plane trees in convex geometric graphs

Nicolas Bousquet, LIRIS, Lyon, nicolas.bousquet@cnrs.fr
Lucas De Meyer, LIRIS, Lyon, lucas.de-meyer@univ-lyon1.fr
Théo Pierron, LIRIS, Lyon, theo.pierron@univ-lyon1.fr
Alexandra Wesolek, LIRIS, Lyon, alexandra_wesolek@sfu.ca

For a set C of n points in convex position, a non-crossing spanning tree is a spanning tree of the points where every pair of edges, represented by the straight line interval between their endpoints, are pairwise non-crossing. We investigate the minimum number of flips required to reconfigure a non-crossing spanning tree on C to another using a sequence of flips, where a flip removes an edge then adds a new one such that the result is still a non-crossing spanning tree on C.

The naive upper bound of $2n - 4$ [1] on the minimum number of flips required stood up for 25 years until recent improvements. Indeed, Aicholzer et al. [2] proved a $2\delta - \Omega(\log \delta)$ upper bound, with δ half of the size of the symmetric difference between the two trees. And then, Bousquet et al. [3] proved a $2n - \Omega(\sqrt{n})$ upper bound. We further improve these upper bounds :

Théorème 1 *Let C be a set of n points in convex position. There exists a flip sequence between any pair of non-crossing spanning trees T_1 and T_2 of length at most $c \cdot \delta(T_1, T_2)$ with $c = \frac{1}{12}(22 + \sqrt{2}) \approx 1.95$. In particular, there exists a transformation of length at most $cn \approx 1.95n$.*

Moreover, we also improve the known lower bound of $\frac{3}{2}n - 5$ flips into $\frac{5}{3}\delta$.

Références

[1] David Avis and Komei Fukuda. *Reverse search for enumeration.* volume 65, pages 21–46. 1996. First International Colloquium on Graphs and Optimization (GOI), 1992 (Grimentz).

[2] Oswin Aichholzer, Brad Ballinger, Therese Biedl, Mirela Damian, Erik D Demaine, Matias Korman, Anna Lubiw, Jayson Lynch, Josef Tkadlec, and Yushi Uno. *Reconfiguration of non-crossing spanning trees.* arXiv preprint arXiv :2206.03879, 2022.

[3] Nicolas Bousquet, Valentin Gledel, Jonathan Narboni, and Théo Pierron. *A note on the flip distance between non-crossing spanning trees.* arXiv preprint arXiv :2303.07710, 2023.

Reconfiguration of homomorphisms.

Moritz Mühlenthaler, G-SCOP, UGA, moritz.muhlenthaler@grenoble-inp.fr
Thomas Suzan, G-SCOP, UGA, thomas.suzan@grenoble-inp.fr

The first part of the talk is joint work with Benjamin Lévêque (CNRS). The second part is joint work with Mark Siggers (Kyungpook National University, South Korea).

Given two graphs G et H, the recoloring graph $\mathrm{Hom}_1(G, H)$ is a graph whose vertices are homomorphisms $G \to H$ (also called "H-colorings") and two homomorphisms are neighbors if and only if they differ on exactly one vertex. The graph $\mathrm{Hom}_1(G, H)$ is has been studied for example in the context of uniform sampling of colorings and local search algorithms. For a fixed graph H, the following problems have been studied :

1. Given a graph G and two homomorphisms $\alpha, \beta : G \to H$, we ask whether there is a path from α to β in $\mathrm{Hom}_1(G, H)$. This is the H-recoloring problem.
2. Given a graph G, is $\mathrm{Hom}_1(G, H)$ connected ? This is the H-mixing problem.

Generalizing previous results, we show the following :

Théorème 1 *H-recoloring is polynomial when :*
— *H is an irreflexive digraph not containing a square of algebraic girth* 0.
— *H is a reflexive digraph not containing a square of algebraic girth* 0 *neither a transitive triangle.*

Théorème 2 *H-mixing is co-NP complete when H is a digraph non tree, not containing a square of algebraic girth* 0 *and such that $H \times A_2$ is connected.*

All these results rely on a topological method introduced in [1]. We give an insight of the key ideas behind this method. Since Theorem 2 also depends on a topological machinery developped in [2], we will show how this machinery works and how we extended it use to irreflexive graphs.

Références

[1] Marcin Wrochna. *Homomorphism reconfiguration via homotopy* SIAM J. Discret. Math., **34(1)** :328–350, 2020.

[2] Hyobeen Kim, Jae baek Lee, and Mark Siggers. Mixing is hard for triangle- free reflexive graphs, 2023. arXiv :2207.03632.

Reconfiguration par 2-adjacence dans la grille carrée

Florian Galliot, LaBRI, Bordeaux, florian.galliot@u-bordeaux.fr
Sylvain Gravier, Institut Fourier, Grenoble, graviers@univ-grenoble-alpes.fr
Isabelle Sivignon, GIPSA-lab, Grenoble, isabelle.sivignon@grenoble-inp.fr

Nous étudions un problème de reconfiguration dans la grille carrée. Une *configuration* est un ensemble de pièces indistinguables disposées sur des cases de la grille carrée, avec au plus une pièce par case. La règle de déplacement est la *2-adjacence* : une pièce ne peut être déplacée que vers une case vide dont au moins deux cases voisines (haut, bas, gauche, droite) sont déjà occupées par des pièces. Etant donné deux configurations A et B, quand est-il possible de passer de A à B via une séquence de déplacements licites ?

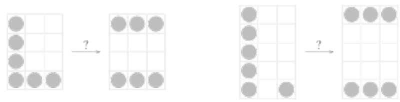


FIGURE 1 – Le puzzle de gauche est résoluble en 12 mouvements. Le puzzle de droite n'est pas résoluble.

Ce problème, dont certaines instances apparaissaient dans la littérature récréative dès les années 1950, a été formulé en toute généralité par Demaine et. al. en 2002 [1]. Cet article introduit une notion cruciale de *pièces bonus*, et affirme notamment que tous les puzzles ayant deux pièces bonus sont résolubles. Il s'avère que les auteurs ont sous-estimé certains cas : nous exhibons une famille de contre-exemples qui montre qu'aucun nombre constant de pièce bonus n'est suffisant en général. Nous montrons cependant, à l'aide d'un algorithme de résolution intuitif, que les puzzles ayant deux pièces bonus sont résolubles au-delà d'un certain nombre total de pièces, qui est serré à une constante additive près pour les puzzles de format carré. Enfin, nous inaugurons l'étude des puzzles ayant une seule pièce bonus : quand le nombre total de pièces est minimum, le problème se réduit à un jeu "type taquin".

Références

[1] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Helena A. Verill. Coin-moving puzzles. In *More Games of No Chance*. Cambridge University Press. ISBN 978-0521808323, pp. 405–431.

Complexité du H-Game joué sur les arêtes d'un graphe.

Eric Duchêne, LIRIS, Université Lyon 1, eric.duchêne@univ-lyon1.fr
Valentin Gledel, Umea University, valentin.glede@umu.se
Fionn Mc Inerney, TU Wien, fmcinern@gmail.com
Nicolas Nisse, INRIA, Université côte d'azur, nicolas.nisse@inria.fr
Nacim Oijid, LIRIS, Université Lyon 1, nacim.oijid@univ-lyon1.fr
Aline Parreau, CNRS, LIRIS, Université Lyon 1, aline.parreau@univ-lyon1.fr
Miloš Stojaković, University of Novi Sad, milosst@gmail.com

Nous présentons ici une étude de la complexité du H-Game, introduit par Beck. Soit H un graphe fixé. Le H-Game est joué sur les arêtes d'un graphe G sur lequel deux joueurs, Maker et Breaker, sélectionnent alternativement une arête libre de G. Lorsque toutes les arêtes du graphe ont été sélectionnées, Maker l'emporte si l'ensemble des arêtes qu'elle a prises contient une copie de H. Sinon Breaker gagne. Sachant qu'il existe toujours un joueur ayant une stratégie gagnante, le problème étudié est ici : étant donné un graphe G, quel joueur a une stratégie gagnante sur G ? La difficulté de ce problème dépendant du graphe H en question, il est naturel de rechercher pour quels graphes H, le problème est-il facilement solvable ou non.

Théorème 1 *Il existe un arbre H pour lequel il est* PSPACE*-complet de déterminer le gagnant.*

Le jeu étant déjà difficile pour H un arbre, il devient alors naturel d'ajouter des restrictions, ou paramètres sur les graphes considérés. Dès lors, si k dénote le nombre de coups joués par Maker, nous obtenons les résultats positifs suivants :

Théorème 2 *Le $K_{1,\ell}$-game est solvable en temps linéaire sur les arbres. Le P_4-game est solvable en temps linéaire sur les graphes.*

Théorème 3 *Le H-Game, paramétré par k, est solvable en temps FPT dans les arbres. Le $K_{1,\ell}$-Game, paramétré par k, est solvable en temps FPT dans les graphes.*

Références

[1] E. Duchene, V. Gledel, F. Mc Inerney, N. Nisse, N. Oijid, A. Parreau, et M. Stojaković, *Complexity of maker-breaker games on edge sets of graphs*, arXiv preprint arXiv:2302.10972, 2023

Sous-arbres orientés dans les digraphes de grand nombre chromatique : chemins à blocs et arborescences

Stéphane Bessy, Université de Montpellier, `stephane.bessy@lirmm.fr`
Daniel Gonçalves, Université de Montpellier, `daniel.goncalves@lirmm.fr`
Amadeus Reinald, Université de Montpellier, `amadeus.reinald@lirmm.fr`

Dans cet exposé, nous nous intéressons à des graphes orientés $D = (V, A)$, et nous notons $\chi(D)$ le nombre chromatique du graphe simple sous-jacent à D. Une conjecture célèbre de Burr [1] est la suivante :

Conjecture 1 *Pour tout entier k, si D est un digraphe tel que $\chi(D) \geq 2k - 2$, alors D contient toutes les orientations d'un arbre sur k sommets comme sous-graphe.*

La meilleure borne connue pour que D contienne tous ces arbres est $\chi(D) \geq \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} + 1$, par un résultat de Addario-Berry et al. [2]. Cette borne pour les arbres n'a pas été améliorée depuis, mais des bornes linéaires sont connues dans certains cas tels que les chemins à deux ou trois blocs ou les étoiles.

Nous nous intéressons à la question sous plusieurs angles. Tout d'abord, nous améliorons la borne quadratique générale d'un facteur $\frac{1}{2}$. Ensuite, nous nous intéressons aux chemins à b blocs, c'est à dire, dont les arêtes sont partitionnables en b chemins dirigés maximaux. Enfin, nous traiterons aussi le cas des arborescences.

Théorème 2 *Soit D un digraphe et $\chi(D)$ son nombre chromatique, alors :*

1. *Si $\chi(D) \geq \frac{k^2}{4} + O(k)$, alors D contient tout arbre orienté sur k sommets.*
2. *Si $\chi(D) \geq (b - 1)k$, alors D contient tout chemin sur k sommets à $b \geq 2$ blocs.*
3. *Si $\chi(D) \geq O(k^{3/2})$, alors D contient toute arborescence (sortante ou entrante) sur k sommets.*

Références

[1] S. A. Burr, *Subtrees of directed graphs and hypergraphs*, Proceedings of the Eleventh Conference on Cominatorics, Graph Theory and Computing, Boca Raton, Congr. Numer., **28** (1980), 227–239.

[2] Addario-Berry, Louigi, Frédéric Havet, Cláudia Linhares Sales, Bruce Reed, and Stéphan Thomassé. *Oriented Trees in Digraphs. Discrete Mathematics* **313***, no. 8 (April 2013)* : 967–74.

Some problems and results on acyclic sets and colouring of digraphs

Ararat Harutyunyan, LAMSADE, Université Paris Dauphine
Colin McDiarmid, Mathematical Institute, University of Oxford
Gil Puig i Surroca, LAMSADE, Université Paris Dauphine

An *acyclic set* of a digraph D is a set of vertices $S \subseteq V(D)$ such that the induced subdigraph $D[S]$ has no directed cycle. The size of the largest acyclic set of D is denoted by $\vec{\alpha}(D)$. The *dichromatic number* of D, denoted by $\vec{\chi}(D)$, is the minimum number of acyclic sets into which $V(D)$ can be partitioned. The *list dichromatic number* of D, denoted by $\vec{\chi}_\ell(D)$, is the minimum k such that, for any assignment of lists of size k to the vertices of D, it is possible to colour the vertices using colours from their lists in a way that the resulting colour classes are acyclic. We first study these parameters in terms of the *circumference* of D, that is, the length of its largest directed cycle. Theorem 1 is reminiscent of a classical theorem of Bondy [1].

Théorème 1 *Let D be a directed graph with circumference $s \geq 2$. Then $\vec{\chi}_\ell(D) \leq s$.*

For tournaments, the result can be improved. The following bound is sharp up to a constant factor.

Théorème 2 *Let T be a tournament of circumference s. Then $\vec{\chi}_\ell(T) \leq (1 + o(1))s/\log_2 s$ as $s \to \infty$.*

Additionally, we slightly improve a result from [2], which gives a bound for the dichromatic number in terms of the circumference and the digirth. Then, in a second section, we focus on the size of largest acyclic sets. The main result of this section concerns random regular digraphs.

Théorème 3 *Let $r \geq 2$ be an integer and let $D_{n,r}$ be a random digraph, chosen uniformly among all r-regular n-vertex oriented simple graphs with labelled vertices. Then, $\vec{\alpha}(D_{n,r}) = \Theta(n \ln r/r)$ asymptotically almost surely.*

Références

[1] Bondy, *Diconnected orientations and a conjecture of Las Vergnas*, J. London Math. Soc. **14(2)** : 277–282 (1976).

[2] Cordero-Michel, Galeana-Sánchez, *New bounds for the dichromatic number of a digraph*, Discret. Math. Theor. Comput. Sci. **21(1)** #7 (2019).

Augmentation de l'hyperarc-connexité des hypergraphes orientés par réorientation d'hyperarcs

Moritz Mühlenthaler, G-SCOP, UGA, moritz.muhlenthaler@grenoble-inp.fr
Benjamin Peyrille, G-SCOP, UGA, benjamin.peyrille@grenoble-inp.fr
Zoltán Szigeti, G-SCOP, UGA, zoltan.szigeti@grenoble-inp.fr

Le théorème de Nash-Williams sur les orientations affirme qu'un graphe non-orienté admets une orientation k-arc-connexe si et seulement si le graphe est $2k$-arête-connexe. Récemment, Ito et al. [1] ont démontré que toute orientation d'un graphe non-orienté $2k$-arête-connexe peut être transformée en une orientation k-arc-connexe en la réorientant, un arc à la fois, sans diminuer l'arc-connexité à chaque étape, donnant une preuve algorithmique du théorème de Nash-Williams. De plus, il est possible de trouver les arcs à réorienter en temps polynomial. Ce résultat implique qu'il est possible de reconfigurer n'importe quelle orientation $(k-1)$-arc-connexe d'un graphe $2k$-arête-connexe vers n'importe quelle autre sans jamais diminuer l'arc-connexité en dessous de $(k-1)$.

Nous généralisons leurs résultats aux hypergraphes et par la même occasion nous donnons une preuve algorithmique de la charactérisation des hypergraphes admettant une orientation k-hyperarc-connexe, originellement donnée par Frank et al. [2].

Nous montrons que n'importe quelle orientation d'un hypergraphe (k,k)-partition-connexe peut être transformée en une orientation k-hyperarc-connexe en la réorientant, un hyperarc à la fois, sans diminuer l'hyperarc-connexité à chaque étape. Cette transformation peut être calculée en temps polynomial et ainsi on obtient le premier algorithme efficace (à notre connaissance) pour calculer une orientation k-hyperarc-connexe d'un hypergraphe si une existe.

Références

[1] T. Ito, Y. Iwamasa, K .Yuni, N. Kakimura, N. Kamiyama, Y. Kobayashi, S. Maezawai, Y. Nozaki, Y. Okamoto and K. Ozeki, *Monotone edge flips to an orientation of maximum edge-connectivity à la Nash-Williams*, ACM Transactions on Algorithms (TALG) (2023), 19(1).

[2] A. Frank, T. Király and Z. Király, *On the orientation of graphs and hypergraphs*, Discrete Applied Mathematics, 131(2) :385–400, 2003.

Complexité du problème de distance d'édition minimum à un line-digraphe

Quentin Japhet, DAVID, UVSQ, quentin.japhet@uvsq.fr
Dominique Barth, DAVID, UVSQ, dominique.barth@uvsq.fr
Dimitri Watel, SAMOVAR, ENSIIE, dimitri.watel@ensiie.fr
Marc-Antoine Weisser, LISN, Centrale Supélec, marc-antoine.weisser@centralesupelec.fr

La distance d'édition est une mesure classique utilisée pour évaluer la proximité entre un graphe donné et un autre graphe ou une classe de graphes. Cette distance représente le nombre minimum de modifications requises pour transformer le graphe initial en un graphe appartenant à la classe voulue. Ce problème a fait l'objet de nombreuses recherches notamment sur sa complexité paramétrée vis-à-vis de la distance recherchée [1] selon les classes de graphes considérées. Une étude a été menée sur la classe des line-graphes [2], pour son application possible dans la reconstitution d'information sur les topologies de réseaux électriques. Nous nous concentrons ici sur la version orientée du problème, la classe des line-digraphes.

Nous avons montré que le problème est polynomial pour la complétion (seul l'ajout d'arc est autorisé). Nous avons aussi montré que le problème est NP-complet pour la suppression (uniquement des retraits d'arc). La difficulté du problème est liée à la présence d'un sous-graphe partiel particulier, le Z, un graphe à quatre sommets et trois arcs liés ainsi : (u, v), (w, v) et (w, x). En particulier, le problème reste NP-Complet même si le graphe est une union de Z et il est FPT lorsqu'il est paramétré par le nombre de Z présents dans le digraphe.

Références

[1] C. Crespelle, P.G. Drange, F.V. Fomin, P.A. Golovach, *A survey of parameterized algorithms and the complexity of edge modification*, Computer Science Review, 48 :100556 (2023).

[2] W. Ehounou, D. Barth, A. de Moissac, D. Watel, M.-A. Weisser. *Minimizing the hamming distance between a graph and a line-graph to discover the topology of an electrical network*, Journal of Graph Algorithms and Applications, 24 :133–153 (2020).

Asymptotiques pour les séries graphiquement divergentes

Sergey Dovgal, Squarepoint Capital, vit.north@gmail.com
Khaydar Nurligareev, LiB, Université de Bourgogne,
Khaydar.Nurligareev@u-bourgogne.fr

Nous proposons une nouvelle méthode pour obtenir les coefficients de développements asymptotiques complets de manière systématique, adaptée à diverses familles de graphes. L'idée principale est d'introduire un nouveau type de série génératrice (bivariée) pour les coefficients d'expansion, que nous appelons *fonction génératrice de coefficients*. Nous montrons que les fonctions génératrices de coefficients satisfont certaines propriétés générales qui permettent d'exprimer les asymptotiques sous une forme courte. Un autre avantage de notre méthode est qu'elle donne une signification combinatoire aux coefficients impliqués. Les applications incluent le calcul des asymptotiques de graphes connexes, de tournois irréductibles, de graphes orienté fortement connexes, de formules 2-SAT satisfaisables et de graphs d'implication fortement connexes contradictoires. De plus, nous obtenons des asymptotiques des familles ci-dessus avec un nombre fixe de composantes connexes, irréductibles, fortement connexes et contradictoires, respectivement.

Activated Graphs

Julien Baste, Univ. Lille, CRIStAL, julien.baste@univ-lille.fr
Antoine Castillon, Univ. Lille, CRIStAL, antoine.castillon@univ-lille.fr
Clarisse Dhaenens, Univ. Lille, CRIStAL, clarisse.dhaenens@univ-lille.fr
Mohammed Haddad, Univ. Lyon, LIRIS, mohammed.haddad@univ-lyon1.fr
Hamida Seba, Univ. Lyon, LIRIS, hamida.seba@univ-lyon1.fr

Cette présentation introduit un nouveau modèle de graphes dynamiques où l'ensemble des sommets et des arêtes est fixe mais seule une partie des sommets sont "actifs" à chaque unité de temps et doivent être pris en compte. Plus formellement on appelle Activated Graph (AG) tout triplet (G, α, ω) où : $G = (V, E)$ est un graphe, $\alpha : V \to \mathbb{N}^*$ est la fonction d'activation des sommets et $\omega : V \to \mathbb{N}^*$ est la fonction de désactivation des sommets. L'intérêt de ce modèle et de se concentrer sur l'ensemble $V_t = \{v \in V \mid \alpha(v) \leq t < \omega(v)\}$ des sommets actifs et sur le graphe formé par ces sommets $G_t = G[V_t]$. Le problème général associé à cette structure est de maintenir une propriété π sur le graphe G_t.

Définition 2 (π-AG problem) *Etant donné une graphe $G = (V, E)$ et une fonction d'activation $\alpha : V \to \mathbb{N}^*$. Existe-t-il une fonction $\omega : V \to \mathbb{N}^*$ telle que G_t vérifie π pour tout entier t ?*

Danse cette présentation nous nous intéresserons aux aspects de complexité classique et paramétrée des problèmes associés à différentes propriétés π. Une preuve similaire à Yannakakis [1] permet de montrer la NP-complétude des π-AG problems lorsque π est héréditaire, non trivialle et polynomiale.

En ce qui concerne la complexité paramétrée nous considérons différents paramètres de graphes tels que Δ, h, d, tw mais aussi des paramètres plus specifiques aux problèmes AG tels que $A = \max_t |\alpha^{-1}(t)|$, $\Omega = \max_t |\omega^{-1}(t)|$ ou $T = \max_{v \in V} \alpha(v)$. Nous présenterons les premiers résultats obtenus résumé en Table 1.

	Δ, h, d	tw	A	Ω	$T + tw$
Clique	FPT	FPT	paraNP	paraNP	-
Independant	paraNP	?	paraNP	paraNP	FPT

TABLE 1 – Complexité paramétrée des π-AG problem.

Références

[1] J.M. Lewis and M. Yannakakis, *The node-deletion problem for hereditary properties is NP-complete*, JCSS (1980), 219–230.

L'optimisation robuste pour les problèmes d'optimisation dans les graphes

Ralf Klasing, LaBRI, Université de Bordeaux, ralf.klasing@labri.fr
Tobias Mömke, Université d'Augsburg, moemke@informatik.uni-augsburg.de
Émile Naquin, LaBRI, Université de Bordeaux, emile.naquin@u-bordeaux.fr

Dans cet exposé, je présenterai les problèmes d'optimisation robuste sur des graphes pondérés, et notamment l'approche de ces problèmes par les algorithmes d'approximation, qui est récente et dont les limites sont encore mal comprises. Nous considérons des problèmes de sélection d'arêtes dans les graphes : il s'agit de sélectionner un multiensemble d'arêtes qui satisfait une certaine propriété et qui est de poids minimal ou maximal. Ceci couvre un grand nombre de problèmes classiques : arbre de Steiner, problème du voyageur de commerce, coupe maximale, entre autres. Dans la suite, nous nous concentrerons sur les problèmes de minimisation, sans perte de généralité.

Fixons un tel problème $\mathcal{P}$. Dans sa variante robuste qui nous intéresse, les instances sont de la forme (G, ℓ, u) où G est un graphe non orienté, et ℓ et u sont des fonctions de coût sur les arêtes, telles que pour toute arête e, $\ell_e \leq u_e$. Il s'agit alors de trouver un multiensemble S d'arêtes qui forme une solution valide à $\mathcal{P}$, de façon à minimiser le *regret* de S, qui est défini comme suit : $r = \max_{d \in [\ell, u]}(d(S) - \mathrm{opt}_d)$, où $[\ell, u] = \{d : \forall e, d_e \in [\ell_e, u_e]\}$.

Une telle solution S est donc robuste dans le sens où peu importe la réalisation de fonction de coût $d \in [\ell, u]$, la distance entre son coût et le coût optimal sur d est bornée par le regret r de cette solution, qui est minimal. La variante robuste du problème du voyageur de commerce peut par exemple permettre de modéliser une situation où il peut y avoir des embouteillages imprévisibles à l'avance et pour lesquels on n'a aucun modèle probabiliste, mais seulement des bornes sur les temps de trajet.

Récemment, l'article de Ganesh, Maggs et Panigrahi (2023) a montré qu'en partant d'une formulation en programmation linéaire, il était possible de se concentrer sur l'établissement d'un *oracle de séparation approximatif* pour obtenir un algorithme d'approximation de la variante robuste. Cependant, les résultats actuels ne sont pas satisfaisants : si TSP a de bonnes constantes qui s'obtiennent facilement, celles obtenues pour le problème de l'arbre de Steiner sont peu satisfaisantes, et s'obtiennent au prix d'une longue analyse. Il est tentant de penser qu'il est possible de donner une méthode pour transformer un algorithme d'approximation pour un problème en algorithme d'approximation pour sa variante robuste, et l'objectif de ce doctorat est de travailler vers ce but.

Path eccentricity and the consecutive one property

Paul Bastide, LaBRI, Université de Bordeaux, `paul.bastide@ens-rennes.fr`
Claire Hilaire, Famnit, University of Primorska, `claire.hilaire@labri.fr`
Eileen Robinson, Université Libre de Bruxelles, `eileen.robinson@ulb.be`

The eccentricity of a path P in a graph G is the maximal distance from P to any vertex of the graph G. The *path eccentricity* of a graph G is the minimal eccentricity over all paths in G.

Gómez and Gutiérrez [1] asked if there is a relation between the path eccentricity of a graph and the consecutive one property.

A graph G is said to have the *open consecutive one property* if its vertices can be ordered such that the open neighborhood of every vertex is consecutive in this order. The closed consecutive one property is defined similarly with respect to closed neighborhood.

We characterise graphs with the open and closed consecutive one property and show that graphs having those properties have path eccentricity at most 1. That is, there exists a path which is at distance at most 1 from any vertex of G.

We also consider a generalisation of the consecutive one property where for each vertex we can consider either the closed or the open neighborhood, and study the path eccentricity of the graphs having such property.

Références

[1] R. Gómez and J. Gutiérrez, *Path eccentricity of graphs*, Discrete Applied Mathematics 337 (2023), 1–13.

Détection de motifs dans les graphes ordonnés

Ducoffe Guillaume, University of Bucharest, Romania, `guillaume.ducoffe@ici.ro`
Feuilloley Laurent, LIRIS, Université Lyon 1, `laurent.feuilloley@univ-lyon1.fr`
Habib Michel, IRIF, Université Paris Cité, `habib@irif.fr`
Pitois François, LIRIS, Université Lyon 1, `francois.pitois@univ-lyon1.fr`

Une façon courante de caractériser un graphe est par le biais de sous-graphes ou de mineurs interdits. Ces caractérisations jouent un rôle central en théorie des graphes, mais ne donnent pas lieu à des algorithmes de reconnaissance efficaces. À l'inverse, de nombreuses classes de graphes peuvent être reconnues efficacement grâce à une caractérisation d'un autre genre : il faut qu'il existe un ordre des sommets tel qu'un motif n'apparaissent pas, où un motif est un sous-graphe ordonné. On s'intéresse alors à la question suivante :

Étant donné un motif de taille k fixé, quelle est la meilleure complexité d'un algorithme qui prend en argument un graphe ordonné de taille n et qui donne en sortie si oui ou non ce motif apparait dans ce graphe ?

D'après nos connaissance, cette question n'a jamais été étudiée en détail. Nous prouvons que quasiment tous les motifs à 3 sommets peuvent être détectés en temps linéaire, tandis que les motifs à 4 sommets nécessitent au moins un temps quadratique. Nous nous intéressons également à la reconnaissance de plusieurs motifs simultanément : étant donné un graphe ordonné G de taille n, quelle est la meilleure complexité pour savoir si au moins un motif d'un ensemble de motifs est présent dans G ? Dans le cas où il y a au moins 2 motifs et qu'ils sont tous de taille 3, nous montrons qu'il existe un algorithme linéaire pour répondre à cette question. Cela est assez contre-intuitif, puisque dans le cas d'un seul motif à 3 sommets, il n'est pas toujours possible d'atteindre une complexité linéaire. Enfin, nous définissons un paramètre, la *merge-width*, et nous montrons qu'un motif de *merge-width* t peut être détecté en temps $O(n^{f(t)})$. Cette borne est applicable directement aux motifs planaires extérieurs, pour lesquels nous prouvons qu'ils ont une *merge-width* de 2.

Références

[1] Guillaume Ducoffe, Laurent Feuilloley, Michel Habib, and François Pitois, *Pattern detection in ordered graphs*, arXiv preprint arXiv:2302.11619 (2023).

Bornes inférieures (double) exponentielles pour des problèmes dans NP paramétrés par treewidth & vertex cover

Florent Foucaud, LIMOS, Université Clermont Auvergne, `florent.foucaud@uca.fr`
Esther Galby, Hamburg University of Technology, `esther.galby@tuhh.de`
Liana Khazaliya, Technische Universität Wien, `lkhazaliya@ac.tuwien.ac.at`
Shaohua Li, CISPA Helmholtz Center for Information Security, `shaohua.li@cispa.de`
Fionn Mc Inerney, Technische Universität Wien, `fmcinern@gmail.com`
Roohani Sharma, Max Planck Institute for Informatics, `rsharma@mpi-inf.mpg.de`
Prafullkumar Tale, IISER Pune, `prafullkumar@iiserpune.ac.in`

La treewidth (tw) est un paramètre important car beaucoup de problèmes NP-difficiles sont FPT paramétrés par la treewidth, i.e., ils admettent des algorithmes de complexité $f(\mathrm{tw})\cdot n^{O(1)}$ où n est la taille de l'entrée. Notamment dans le cas de QUANTIFIED SAT, il est connu que, sauf si l'ETH est fausse, cette fonction de treewidth est une tour de puissances. De telles bornes inférieures, qui démontrent que des facteurs au moins double-exponentiels en la treewidth sont nécessaires, sont très rares dans la littérature. En plus, elles sont toutes pour des problèmes qui sont Σ_2^p-, Σ_3^p- ou #NP-complets.

Nous introduisons une nouvelle technique qui permet de démontrer qu'il n'est pas nécessaire de monter plus haut que la classe NP dans la hiérarchie polynomiale pour obtenir des problèmes qui admettent des bornes inférieures double-exponentielles en la treewidth ou le vertex cover number (vc). En particulier, nous étudions les problèmes NP-complets METRIC DIMENSION, GEODETIC SET et STRONG METRIC DIMENSION. Avec notre technique, nous démontrons que, sauf si l'ETH est fausse, ces problèmes n'admettent pas d'algorithmes de complexité $2^{2^{o(\mathrm{tw})}}\cdot n^{O(1)}$ même restreint aux graphes de diamètre borné. De plus, pour STRONG METRIC DIMENSION, cette borne inférieure double-exponentielle tient même pour le vertex cover number. Ce phénomène n'est pas possible pour les deux autres problèmes car nous donnons des algorithmes de complexité $2^{O(\mathrm{vc}^2)}\cdot n^{O(1)}$ pour eux. Aussi, nous démontrons que, sauf si l'ETH est fausse, ces deux problèmes n'admettent pas d'algorithmes de complexité $2^{o(\mathrm{vc}^2)}\cdot n^{O(1)}$. Nous complétons tous nos résultats en démontrant que nos bornes inférieures sont serrées.

Références

[1] F. Foucaud, E. Galby, L. Khazaliya, S. Li, F. Mc Inerney, R. Sharma et P. Tale, *Tight (Double) Exponential Bounds for NP-complete Problems : Treewidth and Vertex Cover Parameterizations*, arxiv : 2307.08149, 2023.

Dimension métrique dans les graphes chordaux de largeur arborescente bornée

Nicolas Bousquet, Univ. Lyon, Université Lyon 1, CNRS, LIRIS UMR 5205, F-69621, Lyon, France. `nicolas.bousquet@univ-lyon1.fr`

Quentin Deschamps, Univ. Lyon, Université Lyon 1, CNRS, LIRIS UMR 5205, F-69621, Lyon, France. `quentin.deschamps@univ-lyon1.fr`

Aline Parreau, Univ. Lyon, Université Lyon 1, CNRS, LIRIS UMR 5205, F-69621, Lyon, France. `aline.parreau@univ-lyon1.fr`

Soit G un graphe non-orienté. Un *ensemble résolvant* de G est un sous-ensemble S de sommets de G tel que chaque sommet de G est uniquement déterminé par ses distances aux éléments de S. La *dimension métrique* d'un graphe est la taille minimale d'un ensemble résolvant du graphe. Déterminer la dimension métrique d'un graphe est un problème difficile en général, le problème de décision associé est NP-complet même restreint aux graphes chordaux [1]. Le problème est également NP-complet pour les graphes de largeur arborescente borné par 24 [2]. Il est en revanche solvable en temps polynomial pour les graphes de largeur arborescente 1. Aucun résultat intermédiaire n'est connu à ce jour, en particulier la complexité pour les graphes de largeur arborescente 2 est ouverte. Il est naturel de se demander si le problème de la dimension métrique est FPT paramétré par la largeur arborescente dans les graphes chordaux. Nous répondons positivement en prouvant :

Théorème 1 *Soit G un graphe à n sommets de largeur arborescente ω. Il est possible de calculer la dimension métrique de G en temps $O(n^3+n^2 \cdot f(\omega))$ où f est une fonction calculable.*

Pour obtenir notre résultat, nous avons adapté une propriété reliant ensemble résolvants et sommets séparateurs dans le cas de cliques séparatrices. Nous dérivons de cette propriété un algorithme basé sur de la programmation dynamique permettant de prouver le résultat annoncé.

Références

[1] F. Foucaud, G. B Mertzios, R. Naserasr, A. Parreau and P. Valicov, *Identification, location-domination and metric dimension on interval and permutation graphs*, Algorithmica **78.3** (2017),

[2] S.Li and M.Pilipczuk, *Hardness of metric dimension in graphs of constant treewidth*, Algorithmica **84.11** (2022),

Ensemble géodésique de surveillance d'arcs

Tapas Das, IIT Dharwad, Karnataka, India, 203111002@iitdh.ac.in
Florent Foucaud, LIMOS, florent.foucaud@uca.fr
Pierre-Marie Marcille, LaBRI, pierre-marie.marcille@labri.fr
PD Pavan, IIT Dharwad, Karnataka, India, 193111001@iitdh.ac.in
Sagnik Sen, IIT Dharwad, Karnataka, India, sen@iitdh.ac.in

Un ensemble de surveillance géodésique est un sous-ensemble des sommets d'un graphe tel que tout sommet du graphe se trouve sur tous les chemins les plus courts entre deux sommets de l'ensemble de surveillance. Une version plus forte de cet objet est l'ensemble géodésique de surveillance d'arêtes, une généralisation où toutes les arêtes du graphe doivent se trouver sur tous les plus courts chemins entre deux sommets de l'ensemble de surveillance. Ce nouvel objet a été proposé dans un article de Foucaud *et al.* en lien avec plusieurs notions dans le domaine de la surveillance de réseau, comme par exemple la distance de surveillance d'arêtes.

Cette présentation expose l'extension de ces notions sur les graphes orientés, pour modéliser les réseaux orientés. Plus particulièrement, y sont établis des analogues des résultats de la variante originale, ainsi qu'une caractérisation des classes de graphes basiques. Nous caractérisons également les graphes sans ensemble géodésique de surveillance d'arcs non-trivial, donnons des bornes de ce paramètre dans le cas général, tout en évoquant les aspects de complexité en montrant que connaitre la taille d'un ensemble de surveillance minimal est, en général, NP-difficile.

Exact Algorithms and Lowerbounds for Multiagent Pathfinding

Foivos Fioravantes, Department of Theoretical Computer Science, FIT, CTU, Prague, Czech Republic
Dušan Knop, Department of Theoretical Computer Science, FIT, CTU, Prague, Czech Republic
Jan Matyáš Křišťan, Department of Theoretical Computer Science, FIT, CTU, Prague, Czech Republic
Nikolaos Melissinos, Department of Theoretical Computer Science, FIT, CTU, Prague, Czech Republic
Michal Opler, Department of Theoretical Computer Science, FIT, CTU, Prague, Czech Republic

In the MULTIAGENT PATH FINDING problem, we focus on efficiently finding non-colliding paths for a set of k agents on a given graph G, where each agent seeks a path from its source vertex to its target. An important measure of the quality of the solution is the length of the proposed schedule ℓ, that is, the length of a longest path (including the waiting time). In this work, we propose a systematic study under the parameterized complexity framework.

We show that the MULTIAGENT PATH FINDING problem is $\mathsf{W}[1]$-hard with respect to k (even if k is combined with the maximum degree of the input graph). The problem remains NP-hard in planar graphs even if the maximum degree and the makespan ℓ are fixed constants. We also show that the problem remains NP-hard even when the input graph is a tree of maximum degree five. Both of these proofs serve as improvements of the current state of the art conserning the intractability of this problem [1]. On the positive side, we show an FPT algorithm for $k + \ell$. As we delve further, the structure of G comes into play. We give an FPT algorithm for parameter k plus the diameter of the graph G. Finally, we show that the problem is $\mathsf{W}[1]$-hard for cliquewidth of G plus ℓ while it is FPT for treewidth of G plus ℓ.

Références

[1] P. Surynek, *An Optimization Variant of Multi-Robot Path Planning Is Intractable*, *In M. Fox and D. Poole, eds., Proceedings of the Twenty-Fourth AAAI Conference on Artificial Intelligence, AAAI 2010, Atlanta, Georgia, USA, July 11-15, 2010*. AAAI Press.

Calculer la Twin-Width : Algorithmes Paramétrés par le Feedback Edge Number

Jakub Balabán, Masaryk University, Czech Republic, jakbal@mail.muni.cz
Robert Ganian, Technische Universität Wien, Austria, rganian@ac.tuwien.ac.at
Mathis Rocton, Technische Universität Wien, Austria, mrocton@ac.tuwien.ac.at

Depuis son introduction par Bonnet, Kim, Thomassé et Watrigant en 2020, la *twin-width* (tww) s'est révélée un paramètre important dans la compréhension et l'unification des classes de graphes sur lesquelles la vérification de modèles pour la logique du premier ordre est FPT. Cependant, la quasi-totalité des résultats algorithmiques nécessite à ce jour qu'une décomposition correspondante -une séquence de contractions dans le cas de la twin-width-soit fournie avec le graphe. Et contrairement à d'autre paramètres comme la tree-width ou la rank-width, pour lesquels une décomposition peut être calculée en temps FPT en le paramètre, ce n'est pas le cas pour twin-width. En effet, déterminer si la twin-width d'un graphe est au plus 4 est un problème NP-complet, ainsi l'existence d'un algorithme FPT ou même XP en la twin-width pour calculer une décomposition optimale est d'ores et déjà exclue. La question de calculer efficacement -en temps FPT- une séquence qui soit approximativement optimale est, elle, toujours ouverte. Au vu de la difficulté de calculer des séquences (presque)-optimales en utilisant la twin-width elle-même comme paramètre, nous considérons un paramètre plus restrictif, mais qui ne rend pas le problème trivial (contrairement à Vertex Cover Number) : le *Feedback Edge Number* (FEN).

Nous obtenons ainsi les premiers algorithmes FPT non-triviaux pour calculer des séquences de twin-width (presque) optimales. Plus précisément, des algorithmes FPT en le FEN du graphe G en entrée pour : (1) calculer une séquence optimale pour G ou déterminer correctement que $tww(G)$ est au moins 3, (2) calculer, pour un ℓ arbitraire, une séquence dont la twin-width est au plus ℓ, ou déterminer correctement que $tww(G)$ est au moins ℓ.

En d'autres mots, nous donnons un algorithme FPT paramétré par le FEN pour twin-width, exact si la twin-width est au plus 2, et avec une erreur additive d'au plus 1 sinon, donnant une approximation très fine.

Comme souvent pour les algorithmes FPT en le FEN, nos résultats procèdent à des réductions de l'instance initiale en une équivalente dont la taille est bornée par une fonction du FEN. La difficulté ici est de prouver que les opérations ne changent pas (ou peu) la twin-width, or la twin-width est très sensible aux subdivisions d'arrêtes notamment, ce qui empêche de travailler uniquement localement comme cela peut être possible pour d'autres problèmes.

Complexité paramétrée de relaxations non-héréditaires de Clique

Ambroise Baril, LORIA, Université de Lorraine ambroise.baril@loria.fr
Antoine Castillon, CRIStAL, Université de Lille, LIRIS, Université Lyon 1 antoine.castillon@univ-lille.fr
Nacim Oijid, LIRIS, Université Lyon 1, nacim.oijid@univ-lyon1.fr

Pour formaliser la notion de “clusters” dans un graphe, définir ces derniers comme des cliques semble trop restrictif, bien que très naturel. Nous envisagerons par conséquent deux relaxations :

1. Une relaxation par les distances via la notion de *s-club*, c'est-à-dire de sous-graphe induit de diamètre au plus s avec $s \geq 1$.
2. Une relaxation par les degrés via la notion de *γ-complete subgraph*, c'est-à-dire de sous-graphe induit où tout sommet a une proportion au moins γ de voisins parmi les autres sommets (avec $\gamma \in]0, 1[$ rationnel).

Les problèmes de décision s-Club et γ-complete subgraph associés sont des relaxations du problème Clique au sens où ce dernier se confond avec 1-Club et 1-complete subgraph.

Bien que la complexité paramétrée de plusieurs autres relaxations de Clique soit déjà connue, l'étude de s-Club et γ-complete subgraph est en pratique entravée par la non-hérédité des classes des s-clubs et des γ-complete subgraphs : ces classes ne sont pas stables par sous-graphes induits. De ce fait, leurs complexités paramétrées sont longtemps restées inexplorées.

Nous présenterons deux de nos réductions qui résolvent cette difficulté. En plus de contribuer à créer des méthodes de réduction vers des problèmes non-héréditaire, les résultats de difficulté qui en découlent permettent de répondre à des questions explicitement ouvertes dans la littérature [1].

Théorème 1 *Pour tout $s \geq 3$ impair, s-Club est NP-complet même sur les graphes 3-dégénérés (et même sur les graphes 2-dégénérés si $s \geq 5$).*

Théorème 2 *Pour tout rationnel $\gamma \in]0, 1[$, γ-complete subgraph est W[1]-difficile paramétré par $\ell = n - k$ (avec n la taille du graphe et k la taille minimale du sous-graphe recherché).*

Références

[1] Komusiewicz, Christian, *Multivariate algorithmics for finding cohesive subnetworks*, Algorithms