Dimension métrique dans les graphes chordaux de largeur arborescente bornée

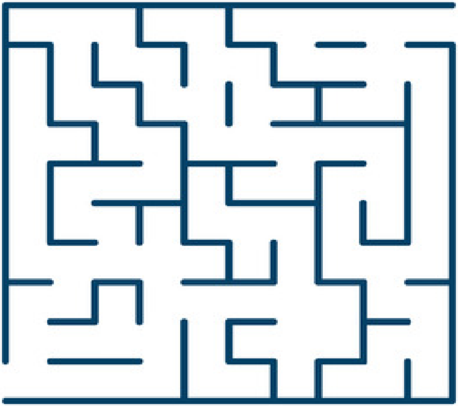
Quentin Deschamps

Avec Nicolas Bousquet et Aline Parreau

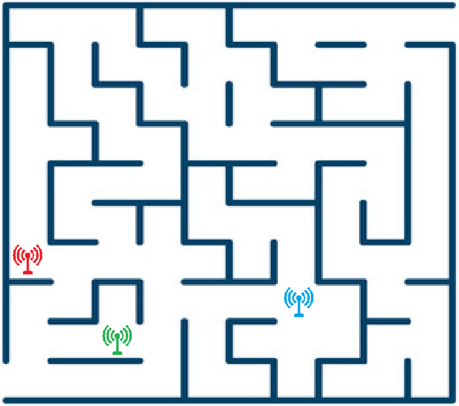
LIRIS, Université Lyon 1

24 novembre 2023

Un robot dans un labyrinthe

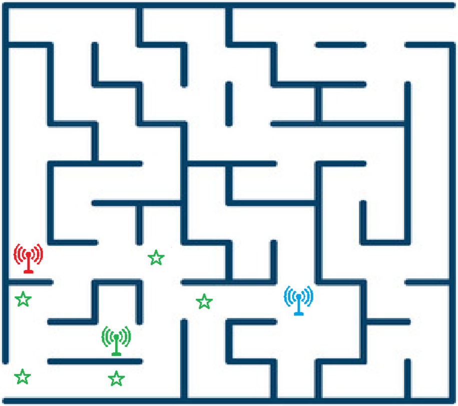


Un robot dans un labyrinthe



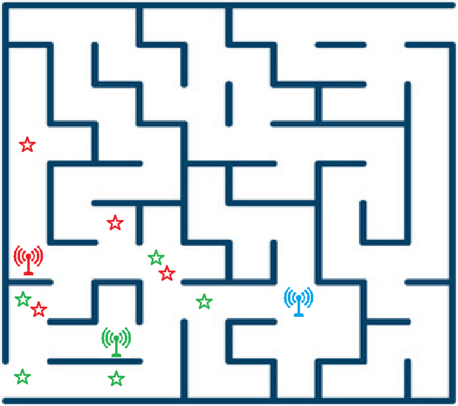
Un robot dans un labyrinthe

- Vert : distance 3



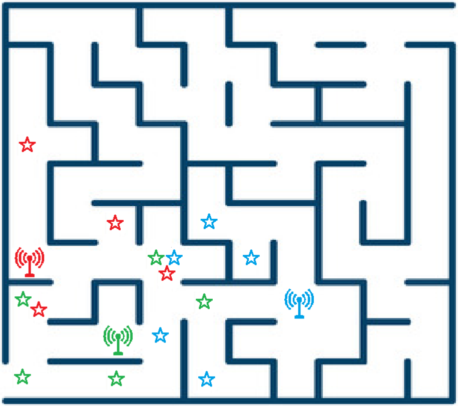
Un robot dans un labyrinthe

- Vert : distance 3
- Rouge : distance 3



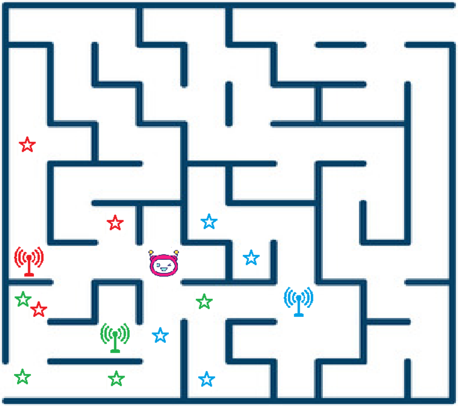
Un robot dans un labyrinthe

- Vert : distance 3
- Rouge : distance 3
- Bleu : distance 4



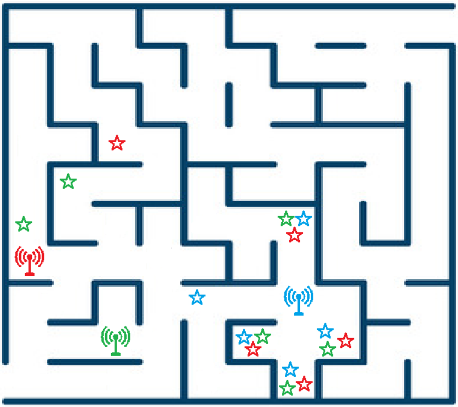
Un robot dans un labyrinthe

Trouvé !



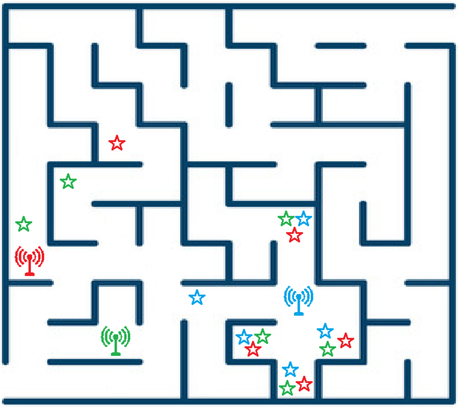
Un robot dans un labyrinthe

- Vert : distance 7
- Rouge : distance 8
- Bleu : distance 2



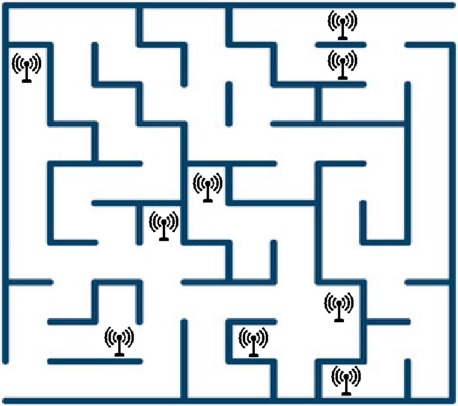
Un robot dans un labyrinthe

On ne sait toujours pas où est le robot.

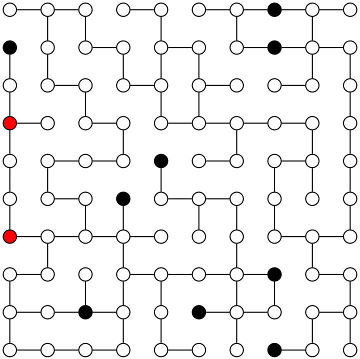


Un robot dans un labyrinthe

- Comment placer les balises pour toujours être capable de trouver le robot ?
- Quel est le nombre minimal de balises ?



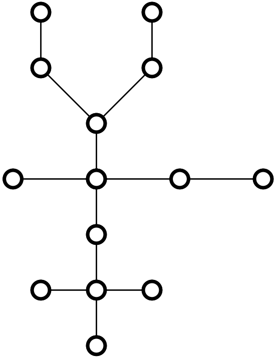
Définition



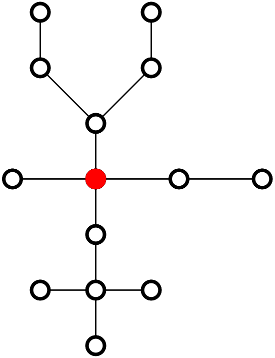
Ensemble résolvant Ensemble S de sommets tel que tous les vecteurs de distance à S soient différents.

Dimension métrique Taille minimale d'un ensemble résolvant.

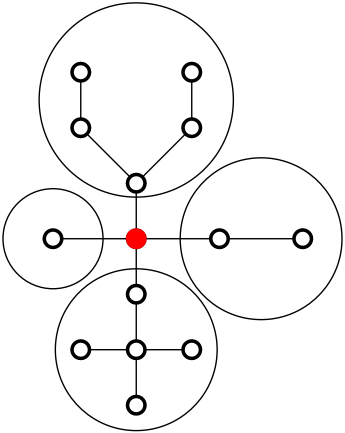
Les arbres et les sommets séparateurs



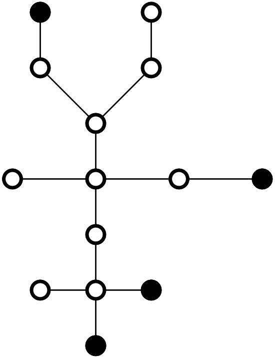
Les arbres et les sommets séparateurs



Les arbres et les sommets séparateurs



Les arbres et les sommets séparateurs



Parenthèse sur la complexité paramétrée

- Idée : raffiner la notion de NP-difficulté.
- But : identifier les paramètres qui rendent le problème difficile.
- Complexité exprimée de la forme $f(\omega).n^c$ avec ω le paramètre et c une constante.

Les sommets séparateurs

- Permet de calculer la dimension métrique dans les arbres.
- Généraliser l'idée :

Les sommets séparateurs

- Permet de calculer la dimension métrique dans les arbres.
- Généraliser l'idée :
  - Petits séparateurs : graphes de petite largeur arborescente

Les sommets séparateurs

- Permet de calculer la dimension métrique dans les arbres.
- Généraliser l'idée :
  - Petits séparateurs : graphes de petite largeur arborescente
    - NP-difficile pour les graphes de largeur arborescente 24 (Li et Pilipczuk, 2022)
    - Linéaire dans les graphes de largeur arborescente 1 (les arbres) (Slater, 1975)
    - Ouvert pour les valeurs intermédiaires.

Les sommets séparateurs

- Permet de calculer la dimension métrique dans les arbres.
- Généraliser l'idée :
  - Petits séparateurs : graphes de petite largeur arborescente
    - NP-difficile pour les graphes de largeur arborescente 24 (Li et Pilipczuk, 2022)
    - Linéaire dans les graphes de largeur arborescente 1 (les arbres) (Slater, 1975)
    - Ouvert pour les valeurs intermédiaires.
  - Séparateurs structurés
    - Tous les séparateurs sont des cliques : graphes chordaux.
    - NP-difficile dans les graphes d'intervalles (et les chordaux) (Foucaud+, 2017)

Résultat

Théorème (Bousquet, Deschamps, Parreau)

La dimension métrique peut se calculer en temps polynomial dans les graphes chordaux de largeur arborescente bornée.

Résultat

Théorème (Bousquet, Deschamps, Parreau)

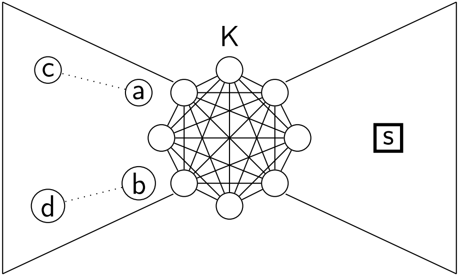
La dimension métrique peut se calculer en temps polynomial dans les graphes chordaux de largeur arborescente bornée.

Théorème (Bousquet, Deschamps, Parreau)

La dimension métrique est FPT paramétrée par la largeur arborescente dans les graphes chordaux.

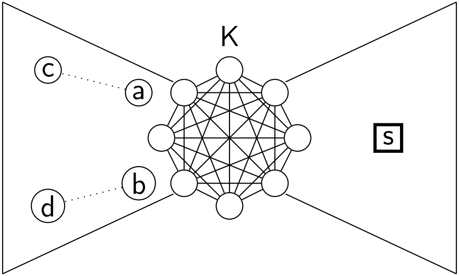
- Il existe un algorithme de complexité $poly(n).f(\omega)$ où ω est la largeur arborescente du graphe.

Utilisation des séparateurs chordaux



- Si s résout (a, b), alors s résout (c, d).
- Si $|d(a, K) - d(c, K)| \geq 2$ alors s résout (a, c).

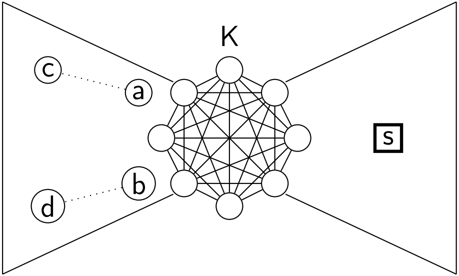
Utilisation des séparateurs chordaux



- Si s résout (a, b), alors s résout (c, d).
- Si $|d(a, K) - d(c, K)| \geq 2$ alors s résout (a, c).

Il est suffisant de résoudre les paires de sommets proche de K.

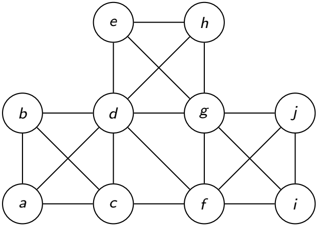
Utilisation des séparateurs de petite taille

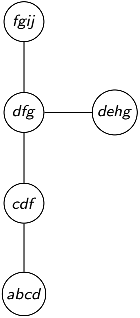


(4,5,4,5,5,5,4,4)
(0,1,0,1,1,1,0,0)

- s résout $(a, b) \iff d(a, s) \neq d(b, s)$.
- Pour savoir si s résout (a, b), on s'intéresse aux sommets de K les plus proche de s.
- Représentation des sommets par des vecteurs binaires.

Décomposition arborescente



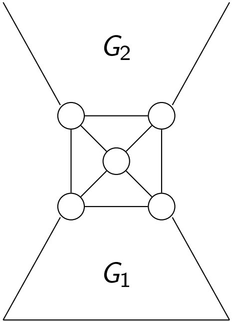


- $\bigcup_{i \in V(T)} X_i = V(G)$.
- Pour chaque arête $xy \in E(G), \exists i \in V(T), x \in X_i$ et $y \in X_i$.
- Pour chaque $x \in V(G)$, l'ensemble $\{i | x \in X_i\}$ induit une sous-arbre connexe de T.

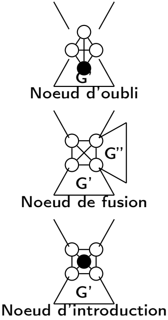
Informations à retenir

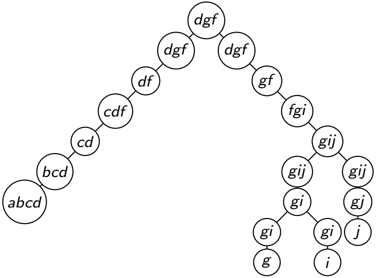
Informations à retenir :

- Sommets de la solution dans G_1.
- Sommets nécessaires dans G_2.
- Paires proches de la clique résolues.

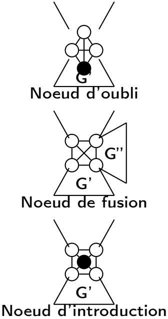


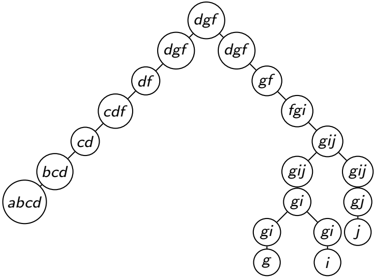
Décomposition arborescente





Décomposition arborescente





Maintien de deux propriétés par programmation dynamique :

- Toute paire de sommets sous la clique est résolue.
- Mémoriser les paires de sommets proches de la clique qui sont résolus.

Conclusion

- Complexité : $O(n^3 + n^2 \cdot f(\omega))$.

Conclusion

- Complexité : $O(n^3 + n^2 \cdot f(\omega))$.
- Une méthode similaire peut-elle fonctionner pour les graphes dont les séparateurs ont diamètre borné ?

Conclusion

- Complexité : $O(n^3 + n^2 \cdot f(\omega))$.
- Une méthode similaire peut-elle fonctionner pour les graphes dont les séparateurs ont diamètre borné ?
- Algorithme en temps polynomial pour les graphes de largeur arborescente 2 ?
  - Existe pour les 2-arbres complets.
  - Existe pour les graphes planaires extérieurs.

Conclusion

- Complexité : $O(n^3 + n^2 \cdot f(\omega))$.
- Une méthode similaire peut-elle fonctionner pour les graphes dont les séparateurs ont diamètre borné ?
- Algorithme en temps polynomial pour les graphes de largeur arborescente 2 ?
  - Existe pour les 2-arbres complets.
  - Existe pour les graphes planaires extérieurs.

Merci pour votre attention !