Détections de motif dans les graphes ordonnés

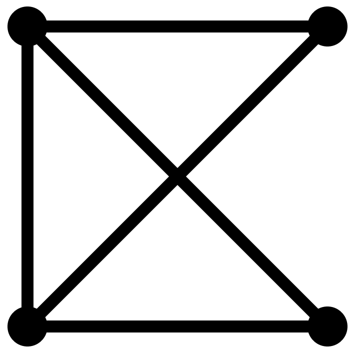
Guillaume Ducoffe, Laurent Feuilloley,
Michel Habib, François Pitois

JGA 2023
24 novembre 2023

Définitions

Graphe

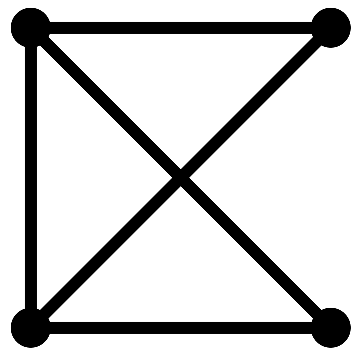
$$G = (V, E)$$



Définitions

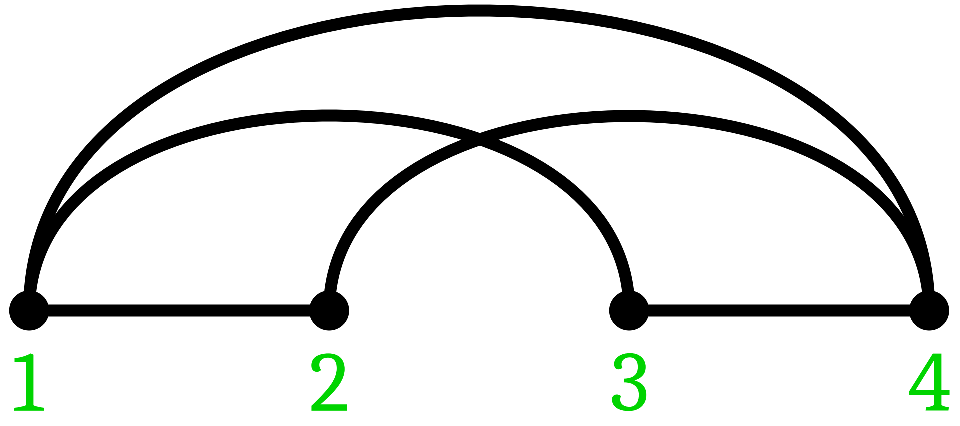
Graphe

$$G = (V, E)$$



Graphe ordonné

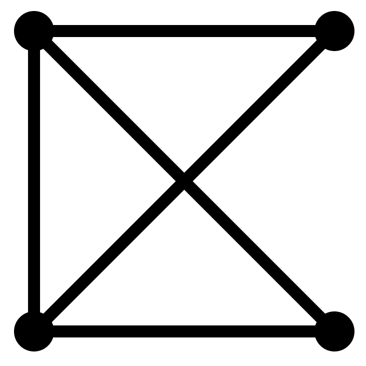
$$G, \tau = (V, E, \tau)$$



Définitions

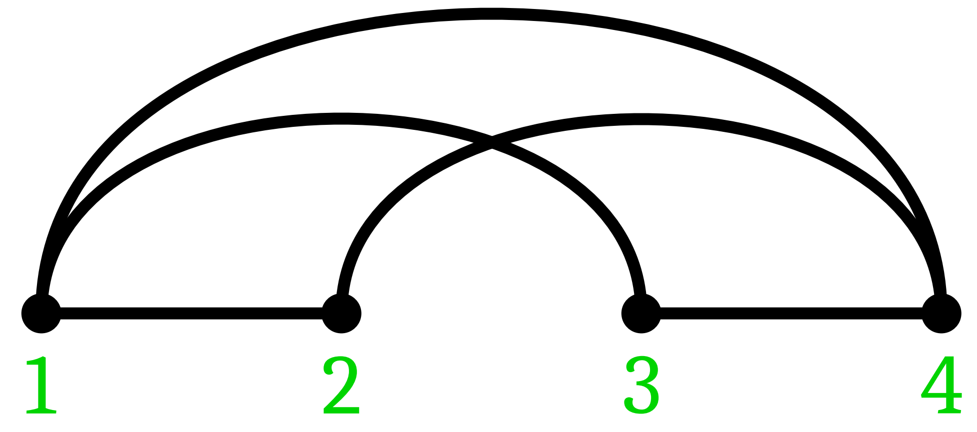
Graphe

$G = (V, E)$



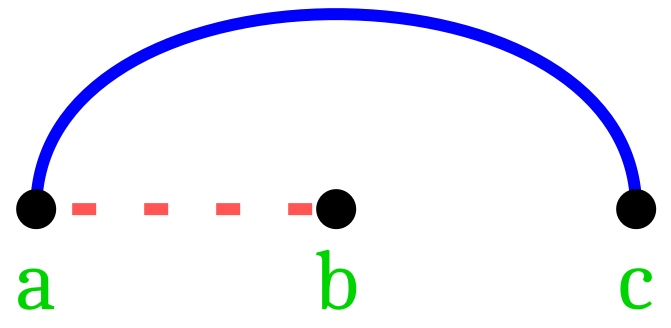
Graphe ordonné

$G, \tau = (V, E, \tau)$



Motif

$P = (V, E_M, E_F, \tau)$

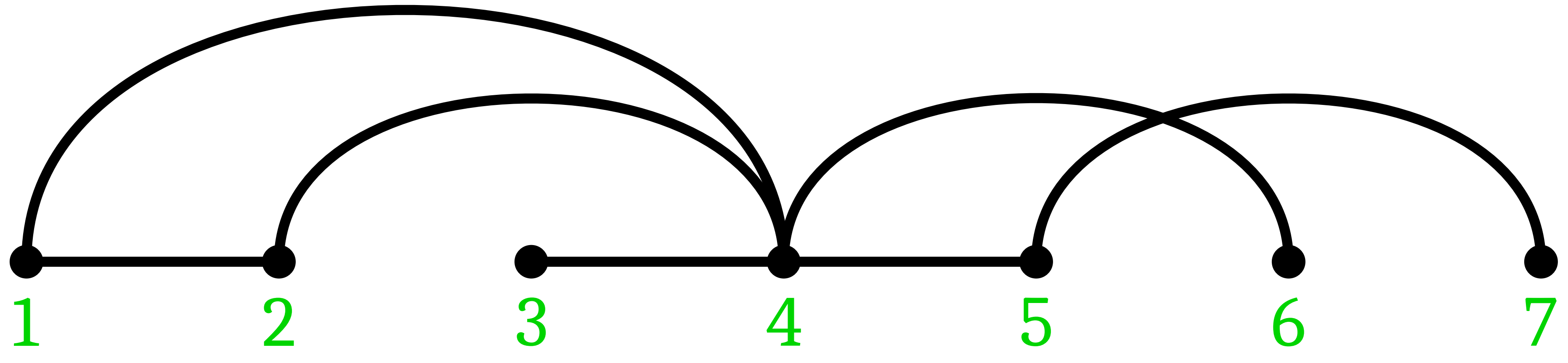


Définitions

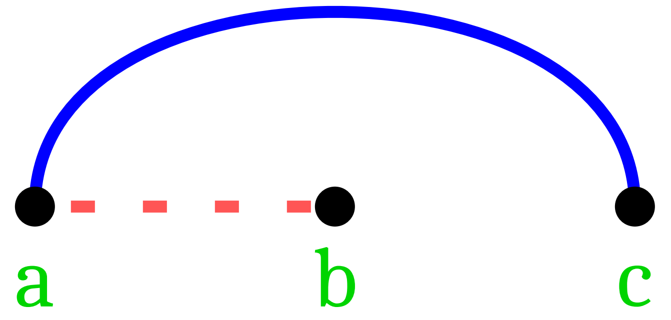
$G, \tau = (V, E, \tau)$ *contient* $P = (V, E_M, E_F, \tau)$ s'il existe un sous-graphe de (G, τ) qui est *compatible* avec P.

Définitions

$G, \tau = (V, E, \tau)$ *contient* $P = (V, E_M, E_F, \tau)$ s'il existe un sous-graphe de (G, τ) qui est *compatible* avec P.



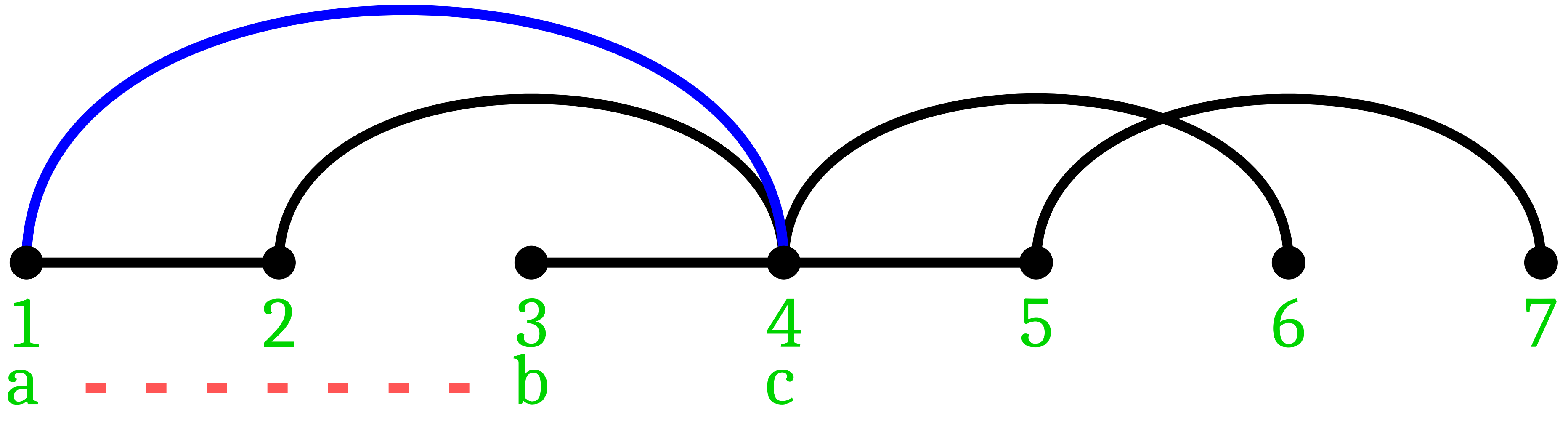
contient



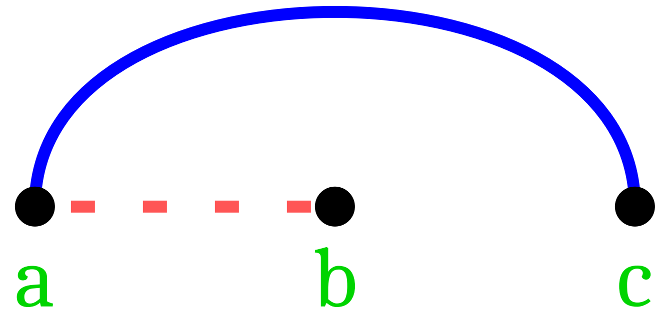
à la position abc = 134

Définitions

$G, \tau = (V, E, \tau)$ ***contient*** $P = (V, E_M, E_F, \tau)$ s'il existe un sous-graphe de (G, τ) qui est *compatible* avec P.



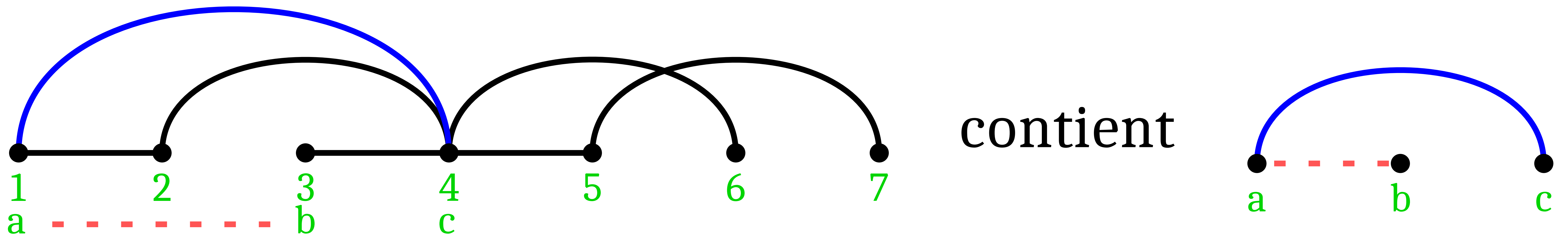
contient



à la position abc = 134

Définitions

$G, \tau = (V, E, \tau)$ ***contient*** $P = (V, E_M, E_F, \tau)$ s'il existe un sous-graphe de (G, τ) qui est *compatible* avec P.



à la position abc = 134

Sinon, (G, τ) ***évite*** P.

Motivation

Motif P $\longrightarrow$ Classe de graphes

Motivation

Motif P $\longrightarrow$ Classe de graphes

La classe des graphes G
tels qu'il existe un ordre τ

Motivation

Motif P $\longrightarrow$ Classe de graphes

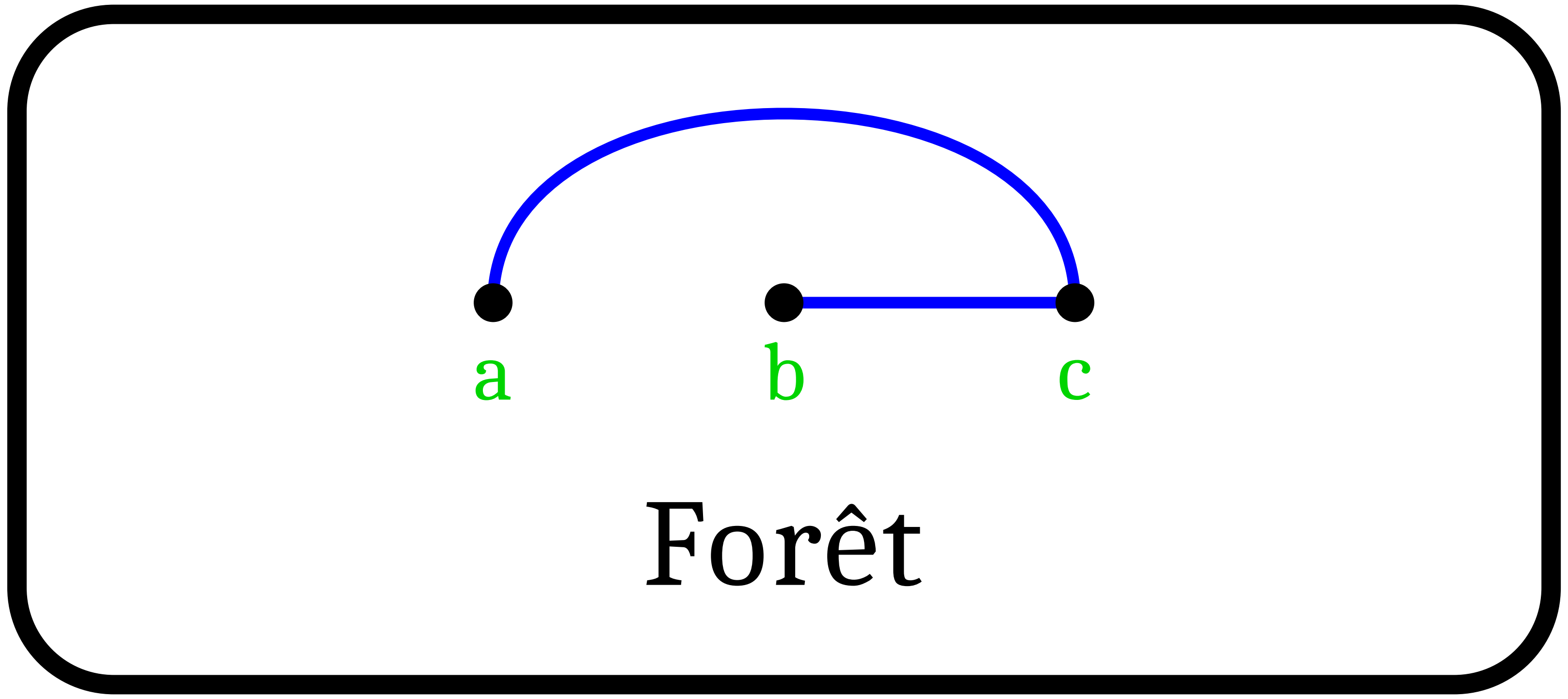
La classe des graphes G
tels qu'il existe un ordre τ
tel que le graphe ordonné (G, τ) évite le motif P

Motivation

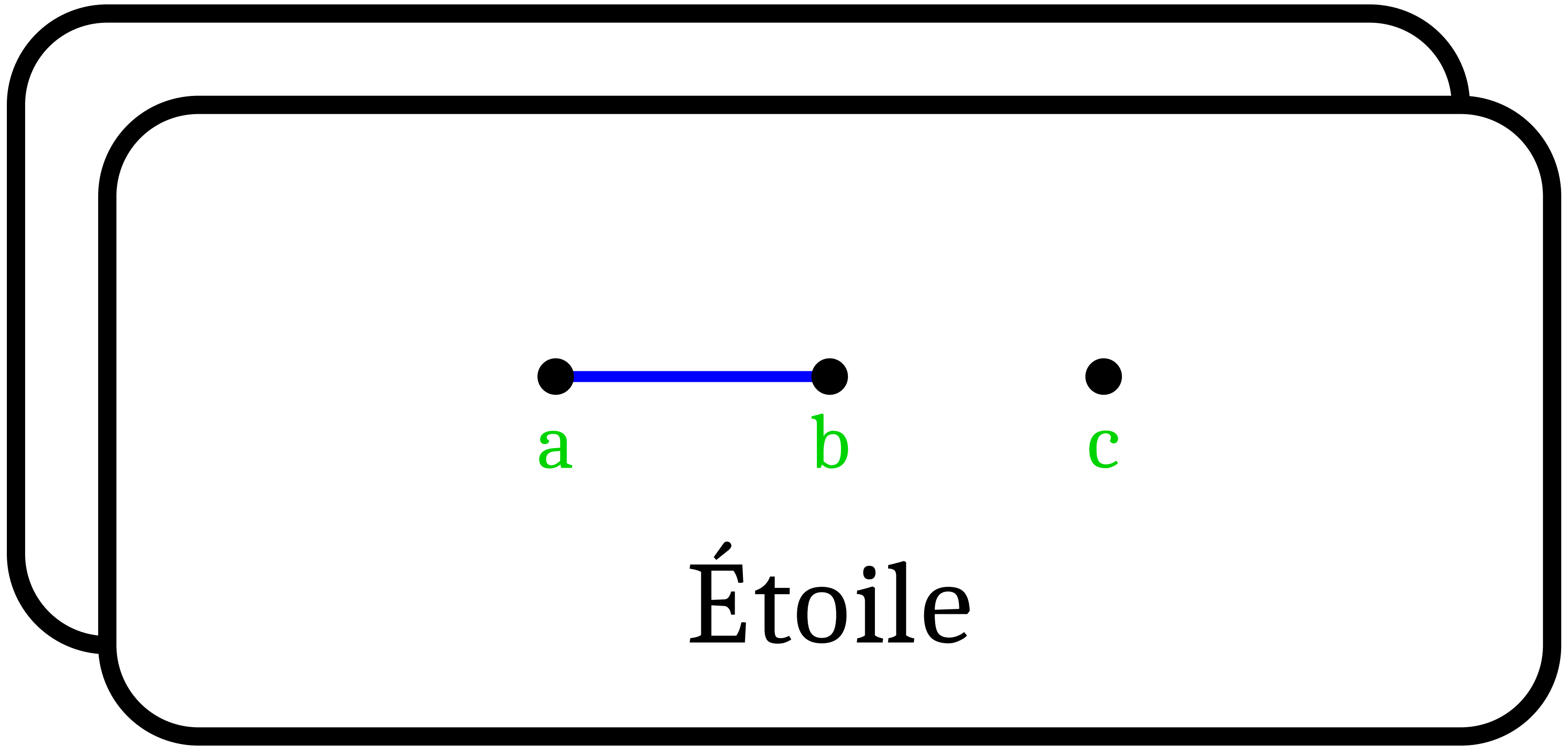
Motif P $\longrightarrow$ Classe de graphes

La classe des graphes G
tels qu'il existe un ordre τ
tel que le graphe ordonné (G, τ) évite le motif P

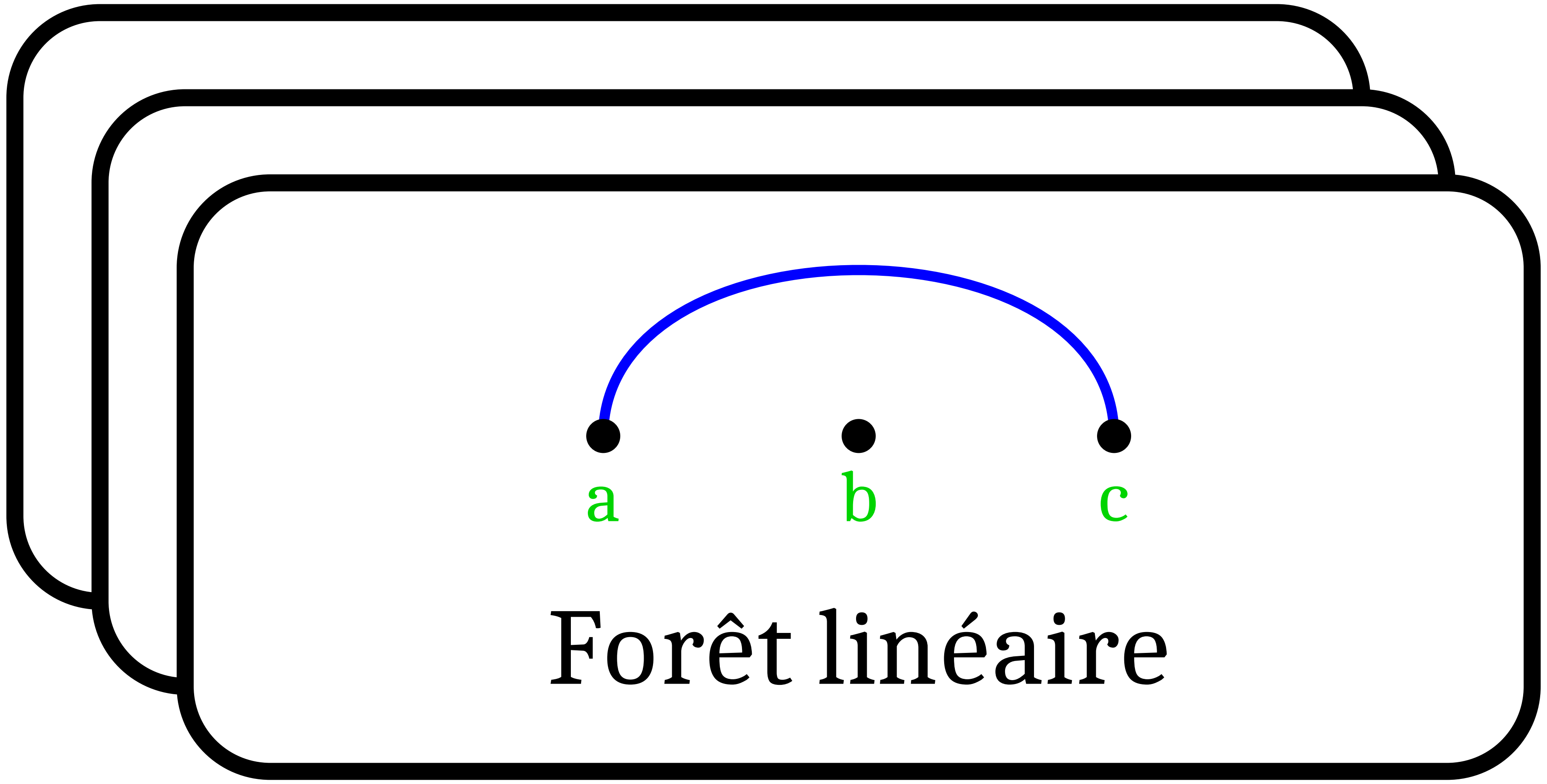
Motivation



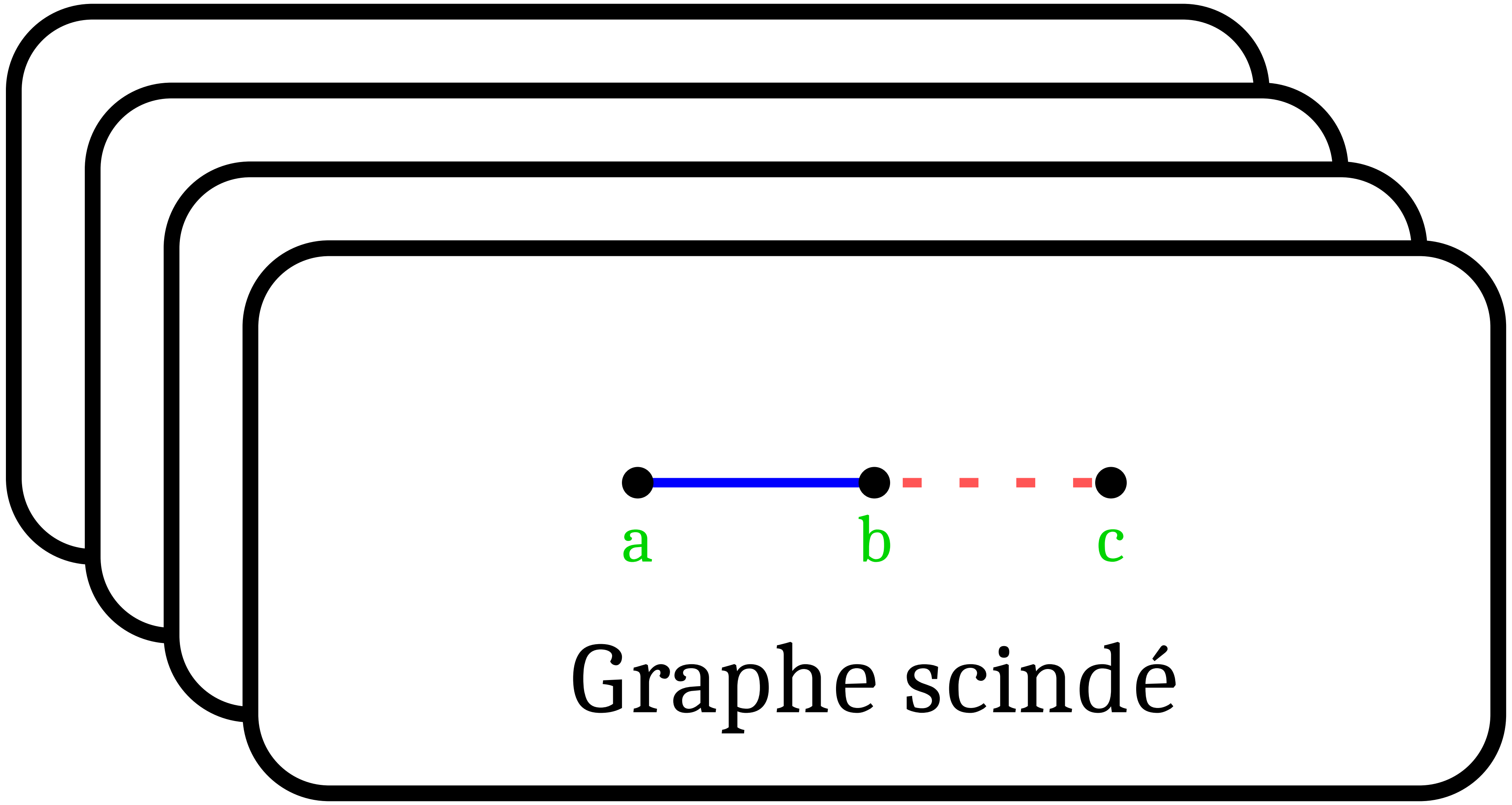
Motivation



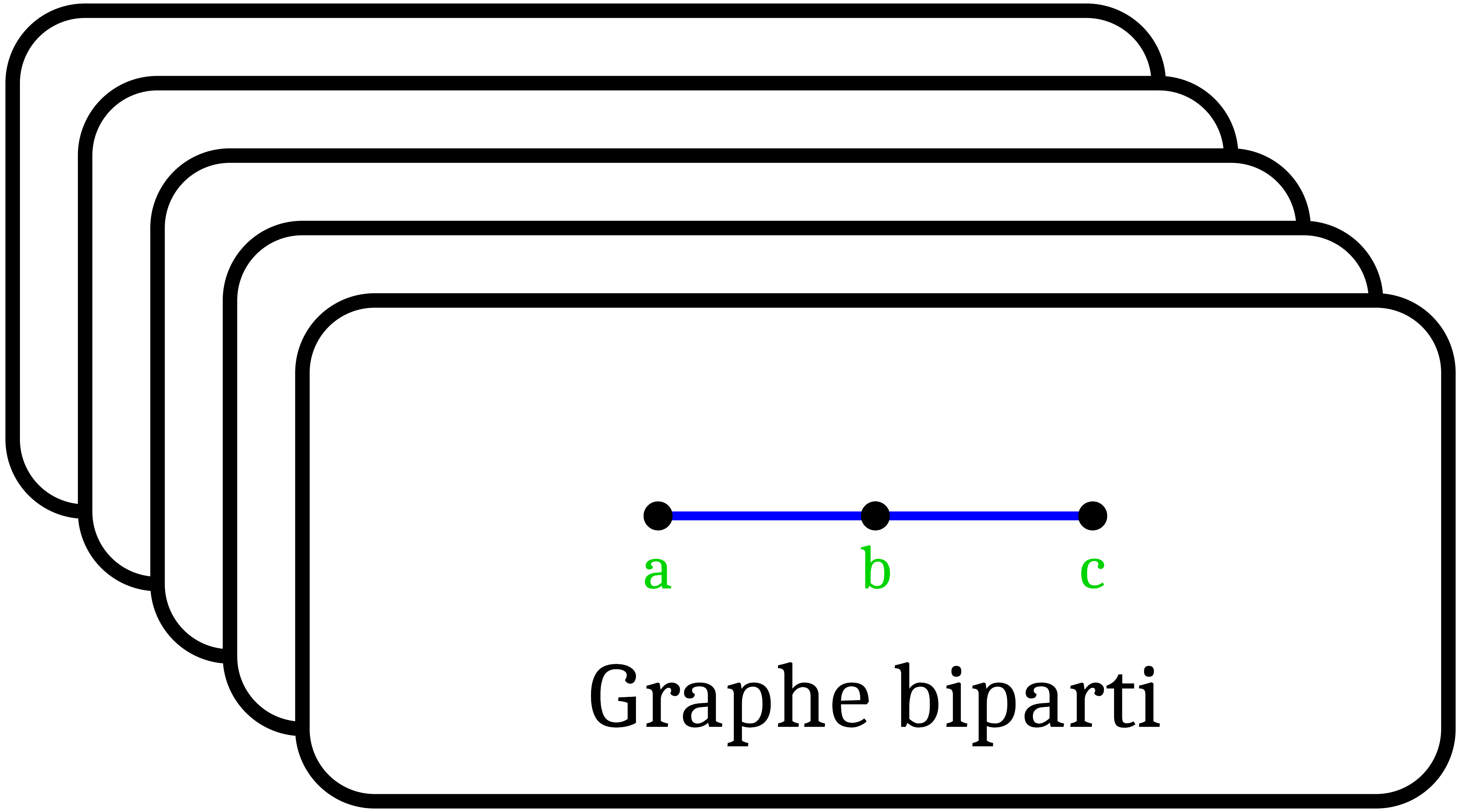
Motivation



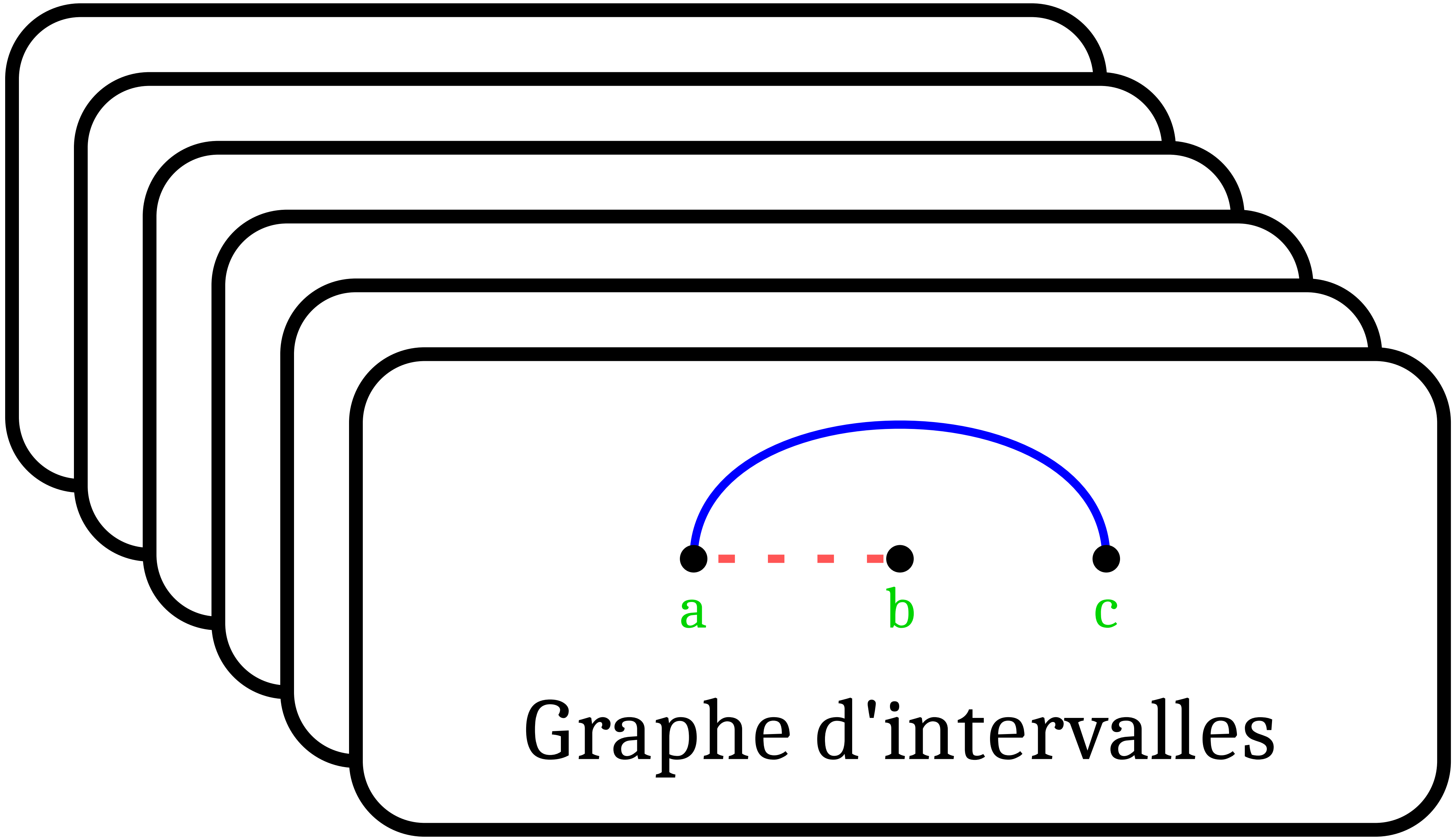
Motivation



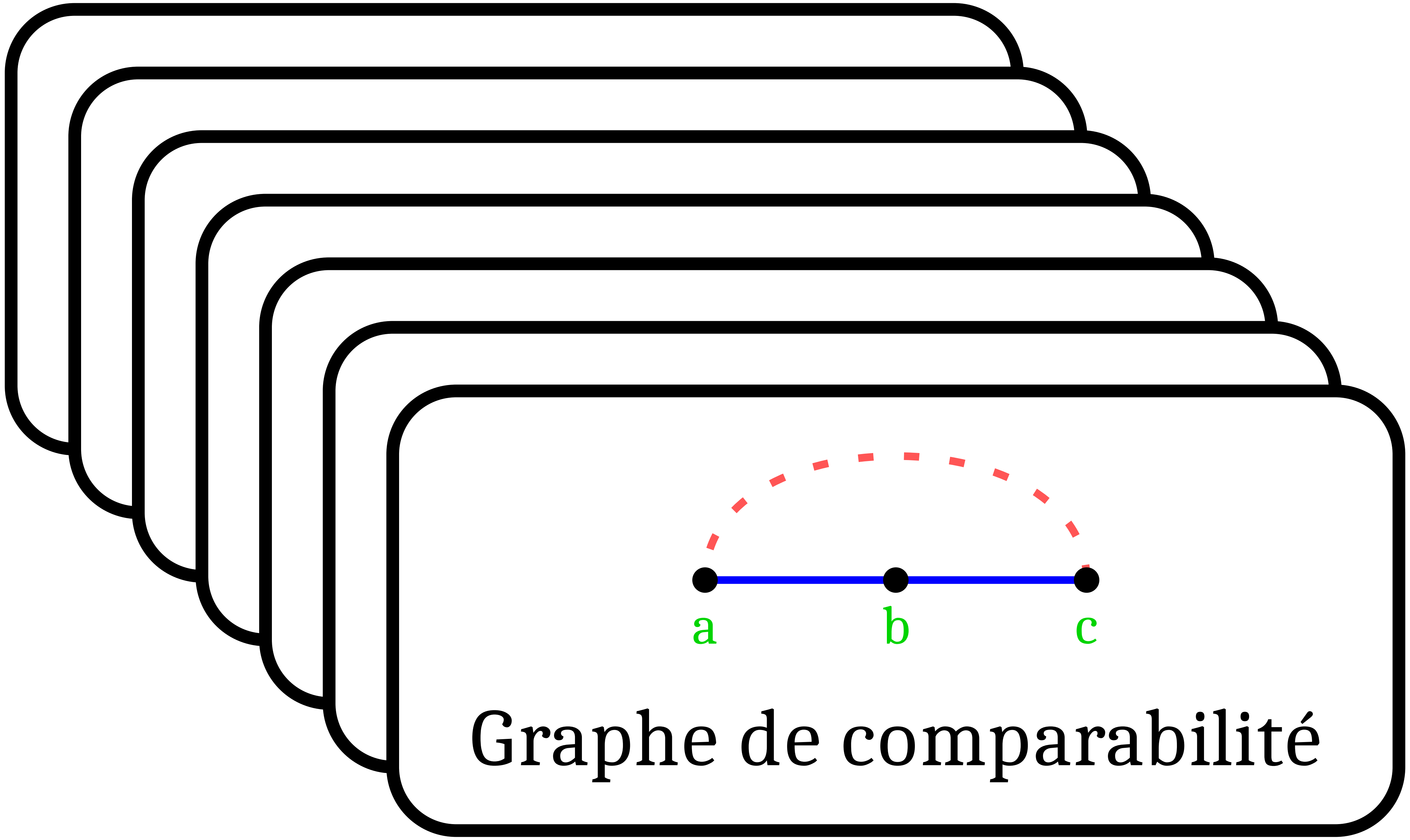
Motivation



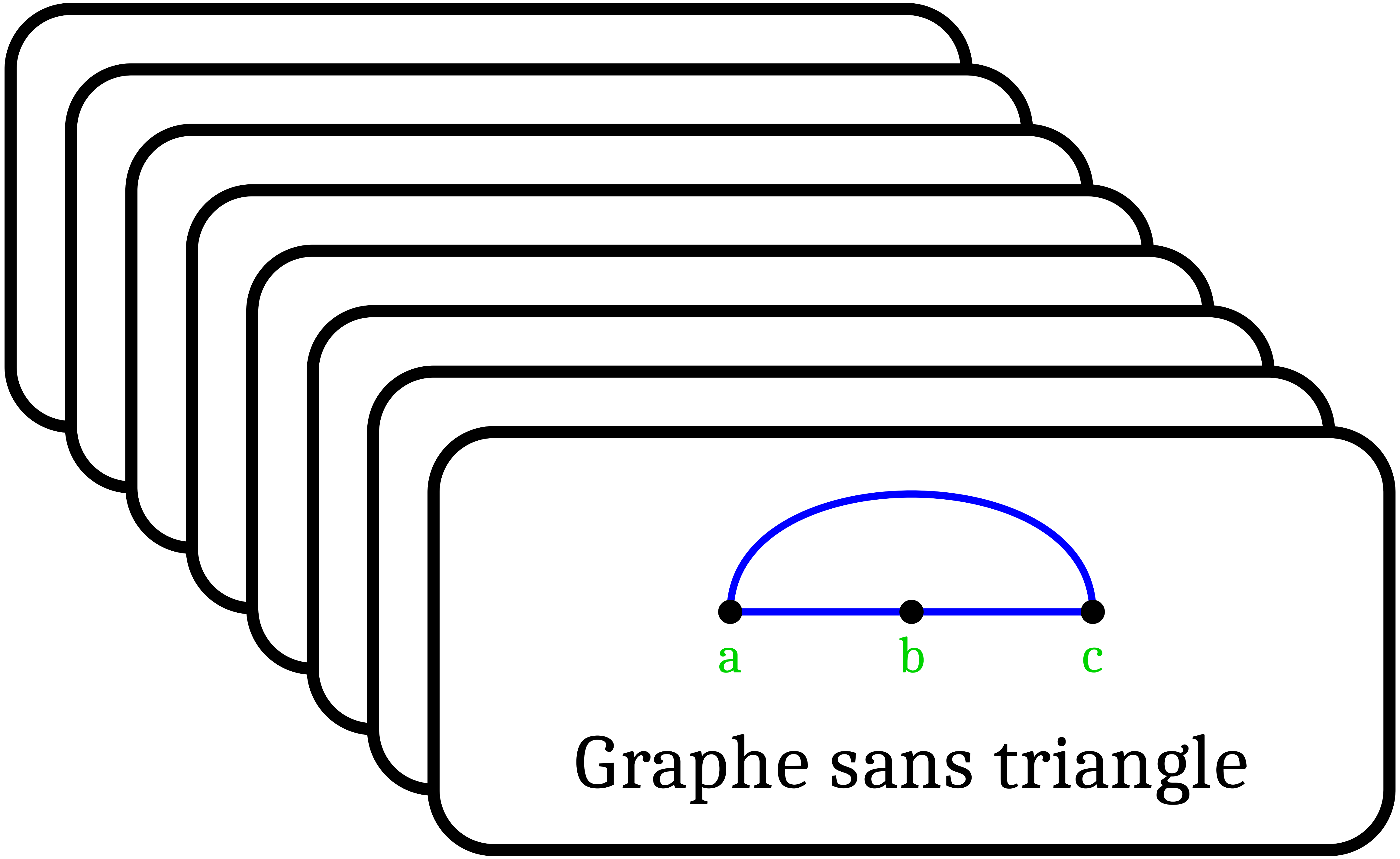
Motivation



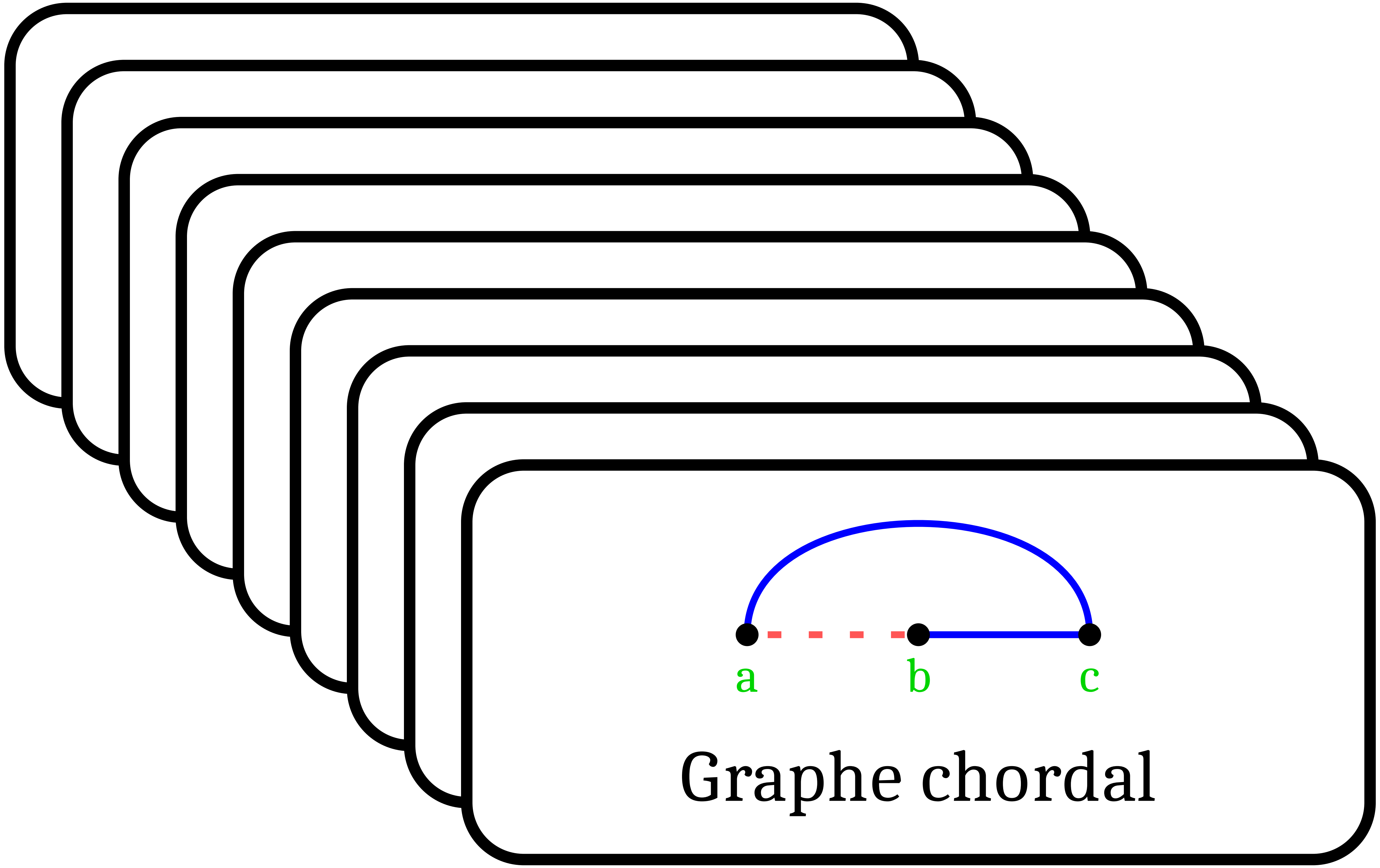
Motivation



Motivation



Motivation



Motivation

Motif P $\longrightarrow$ Classe de graphes

La classe des graphes G
tels qu'il existe un ordre τ
tel que le graphe ordonné (G, τ) évite le motif P

Motivation

Motif P $\longrightarrow$ Classe de graphes

$\Longleftrightarrow$ La classe des graphes G
tels qu'il existe un ordre τ
tel que le graphe ordonné (G, τ) évite le motif P

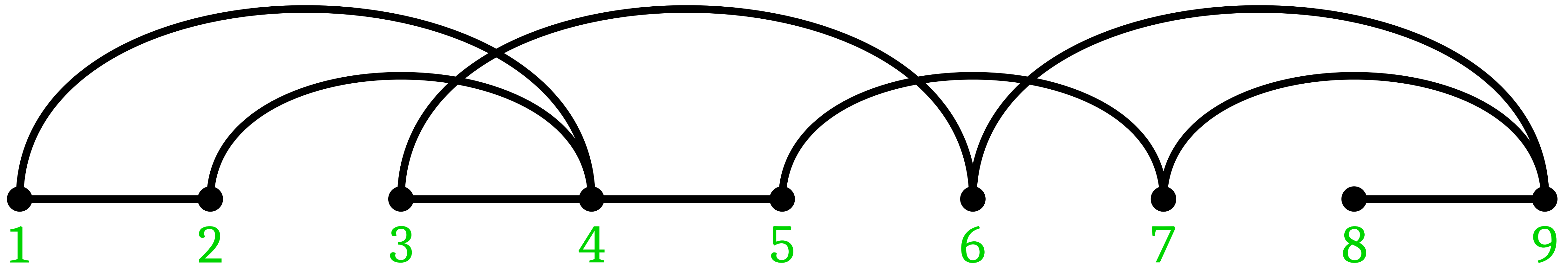
Motivation

Motif P $\longrightarrow$ Classe de graphes

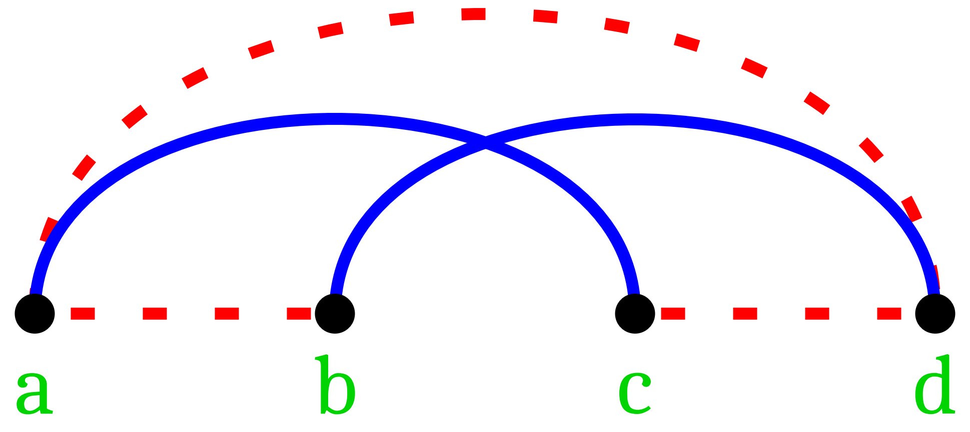
La classe des graphes G
tels qu'il existe un ordre τ
$\longleftrightarrow$ tel que le graphe ordonné (G, τ) évite le motif P

Question

$$G, \tau = (V, E, \tau) =$$



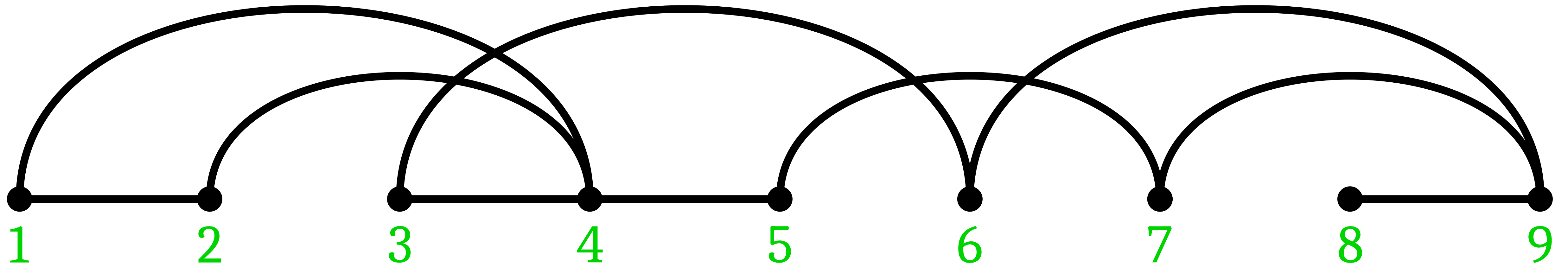
$$P = (V, E_M, E_F, \tau) =$$



Question

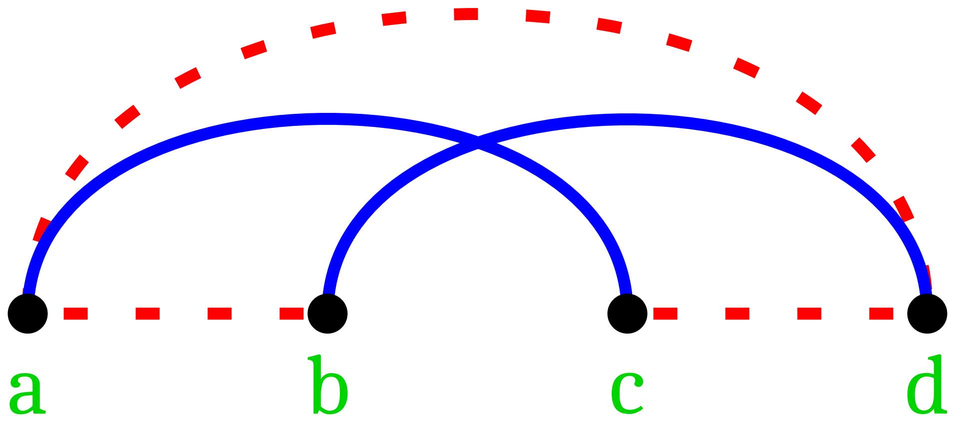
Est-ce que le graphe ordonné

$G, \tau = (V, E, \tau) =$



contient ou évite le motif

$P = (V, E_M, E_F, \tau) =$

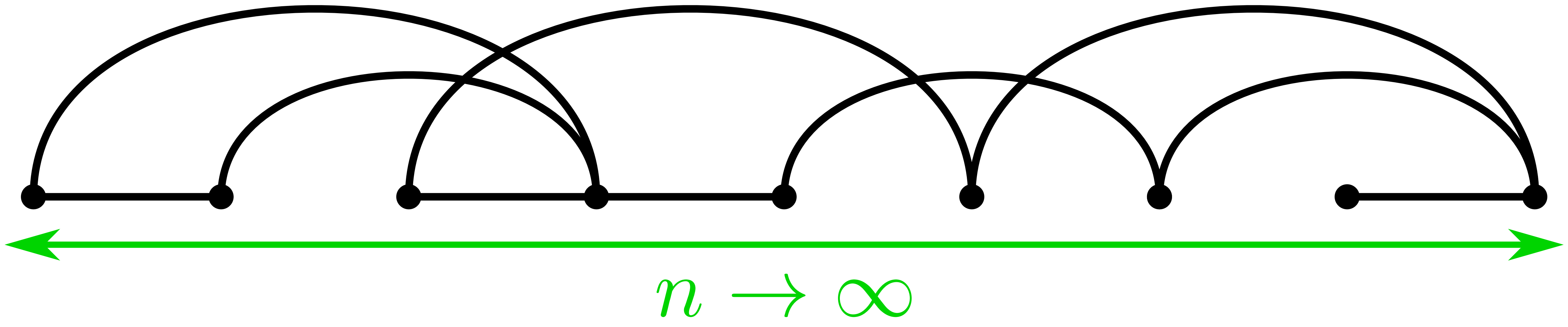


?

Question

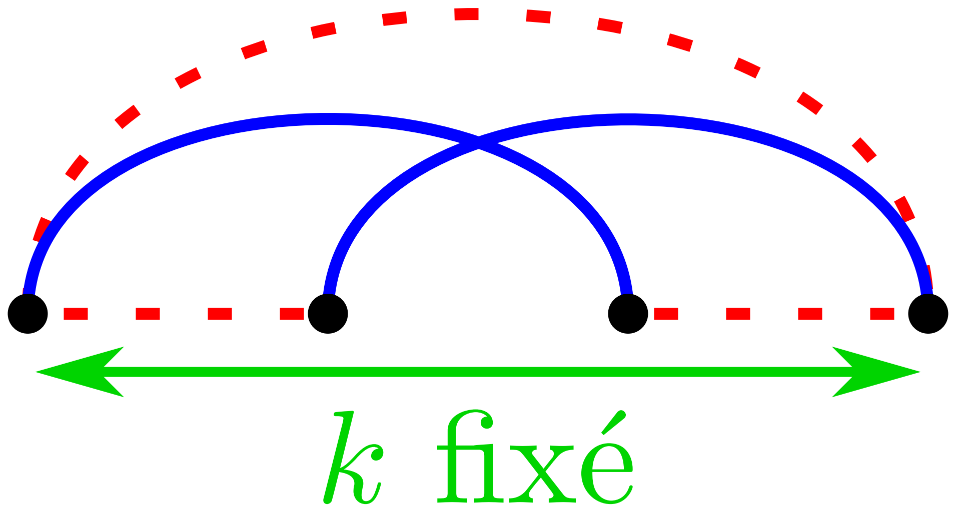
Est-ce que le graphe ordonné

$$G, \tau = (V, E, \tau) =$$



contient ou évite le motif

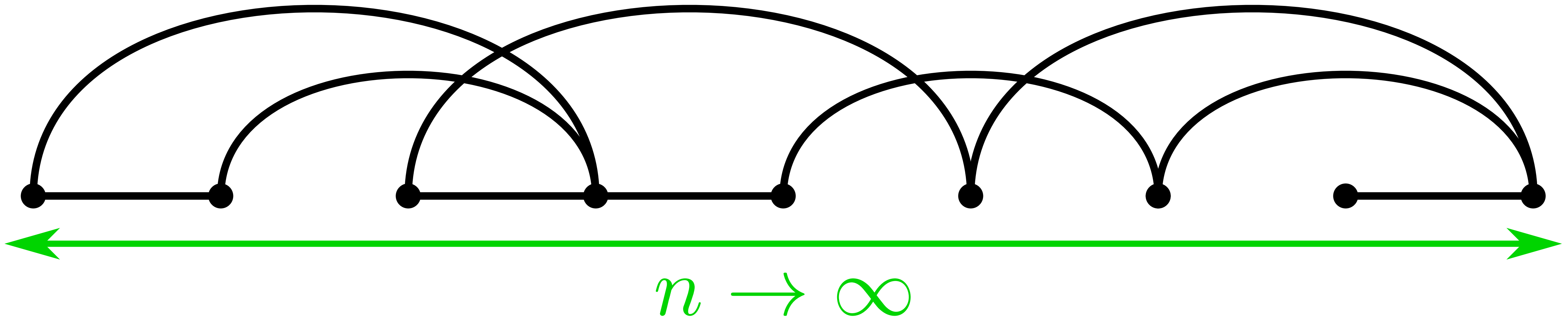
$$P = (V, E_M, E_F, \tau) =$$



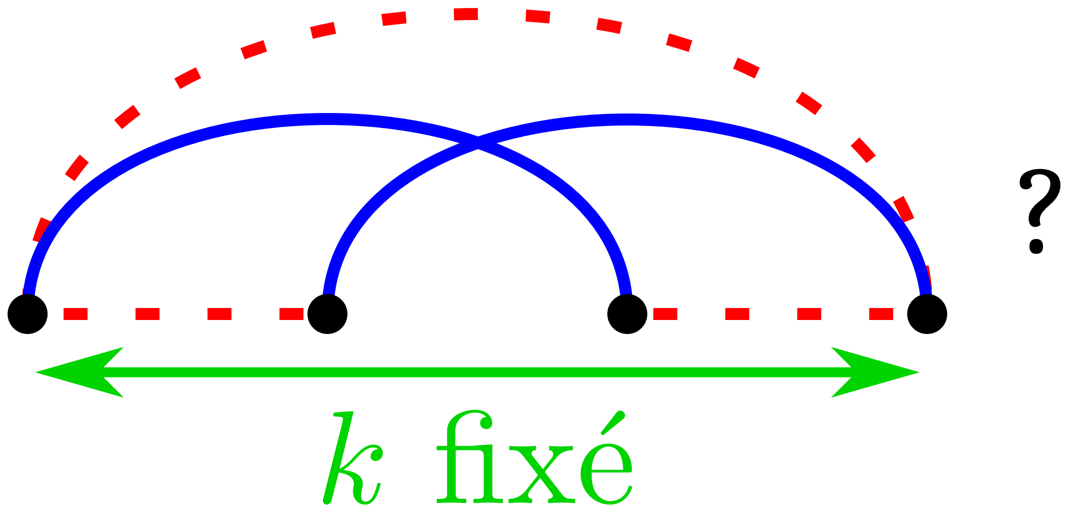
?

Réponse naïve

Est-ce qu'un graphe ordonné

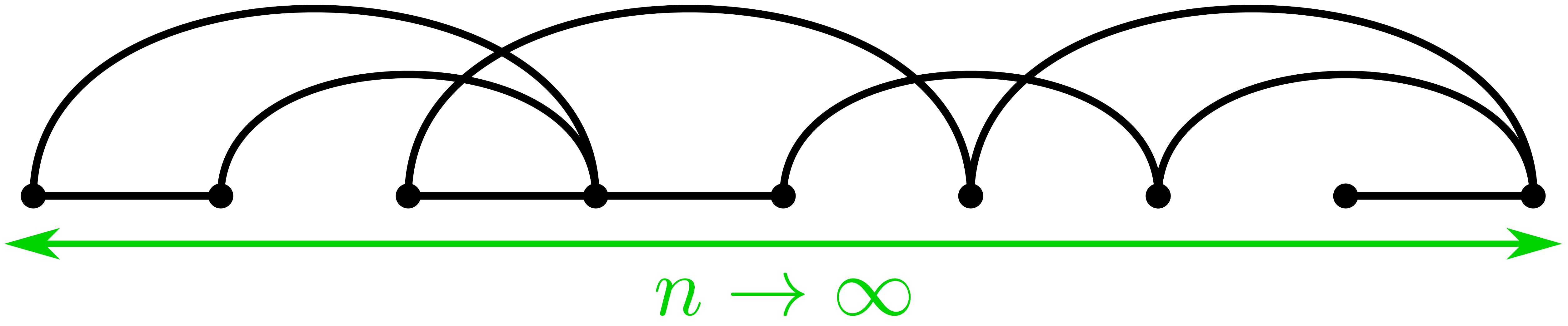


contient ou évite un motif

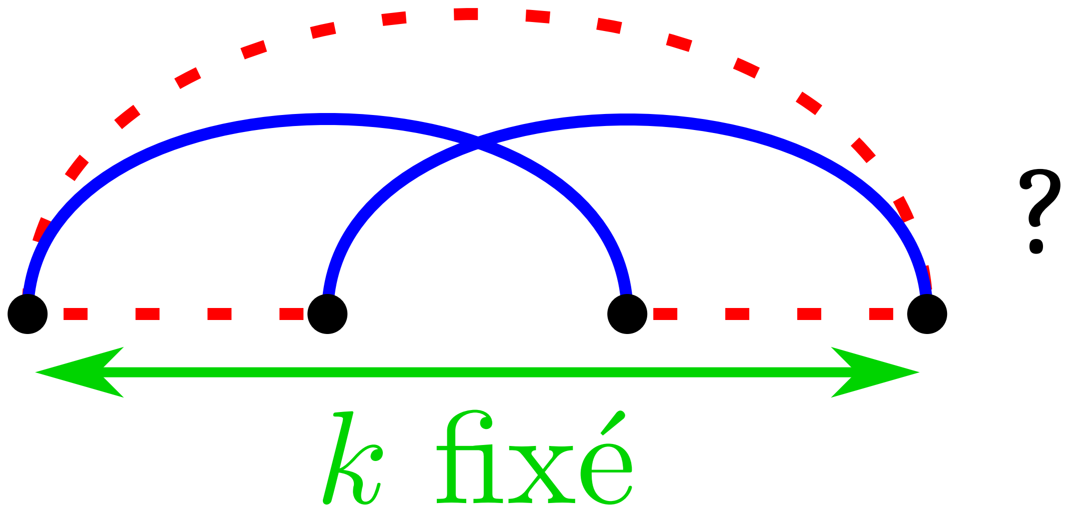


Réponse naïve

Est-ce qu'un graphe ordonné

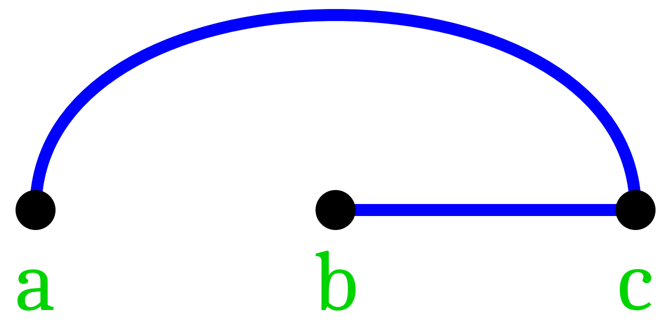


contient ou évite un motif



$$\mathcal{O}(n^k)$$

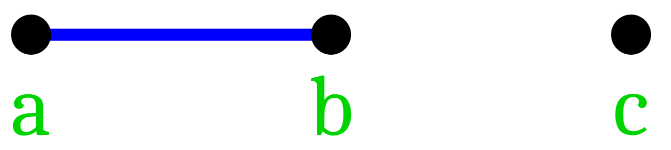
Motifs à 3 sommets



Forêt

$$\mathcal{O}(n+m)$$

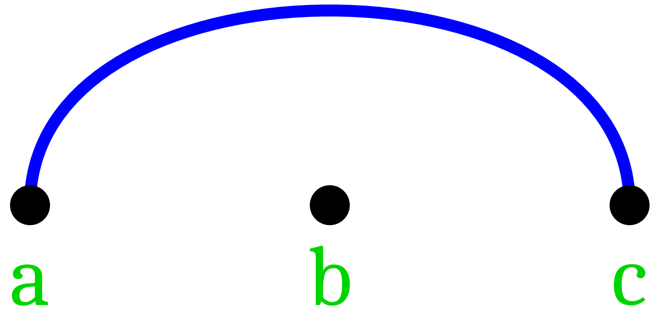
Motifs à 3 sommets



Étoile

$$\mathcal{O}(n+m)$$

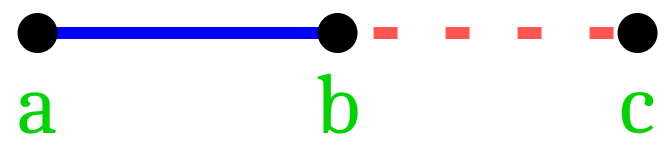
Motifs à 3 sommets



Forêt linéaire

$$\mathcal{O}(n+m)$$

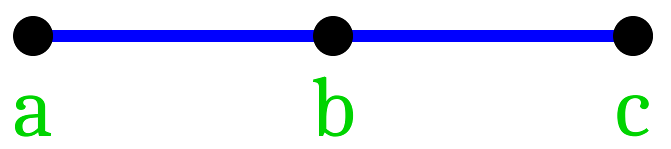
Motifs à 3 sommets



Graphe scindé

$$\mathcal{O}(n+m)$$

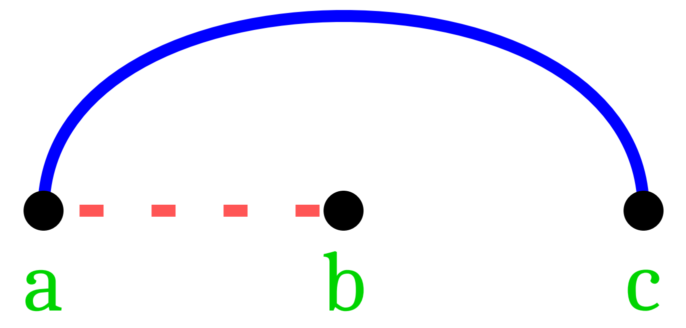
Motifs à 3 sommets



Graphe biparti

$$\mathcal{O}(n+m)$$

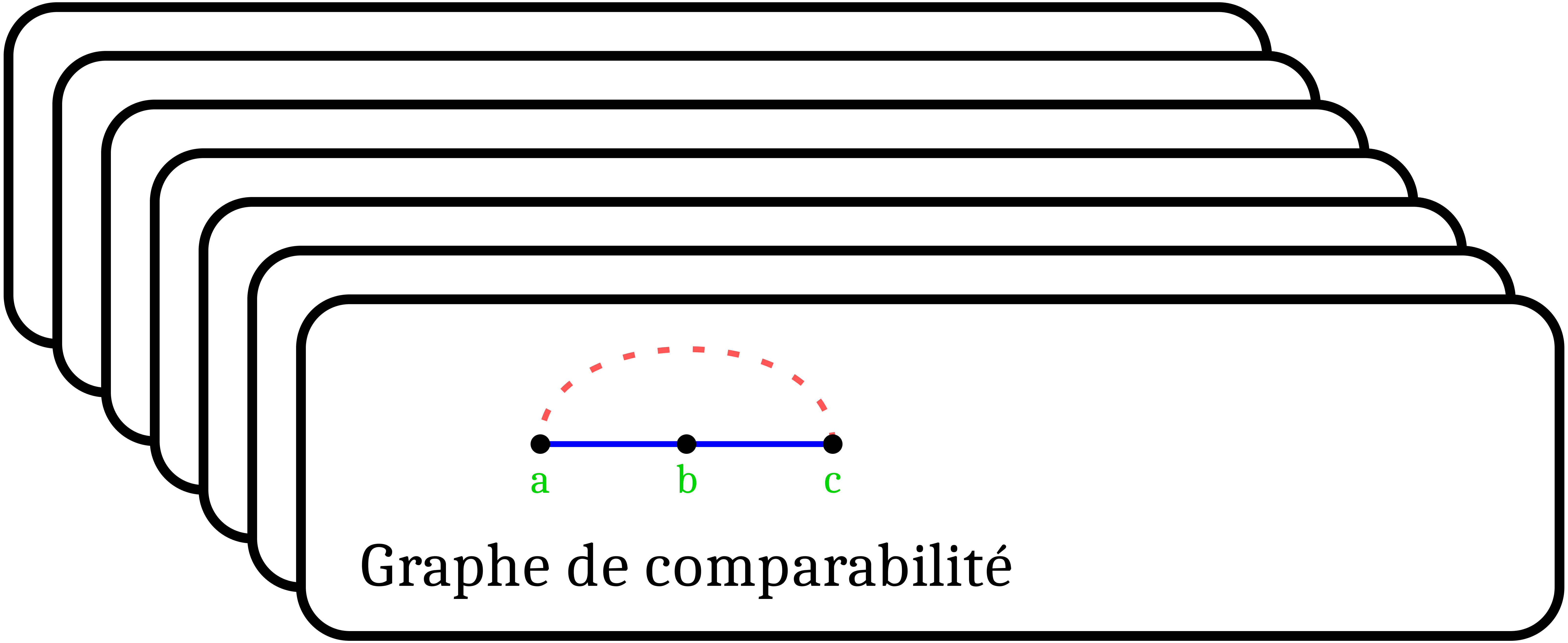
Motifs à 3 sommets



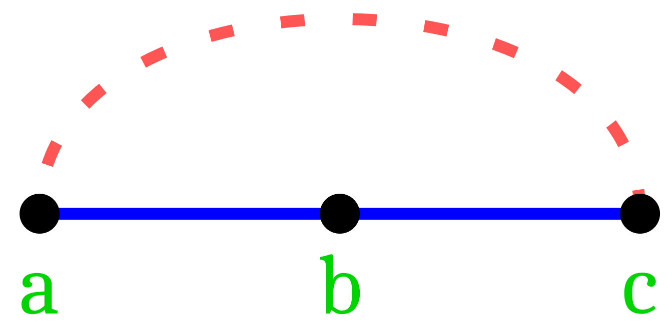
Graphe d'intervalles

$$\mathcal{O}(n+m)$$

Motifs à 3 sommets



Motifs à 3 sommets

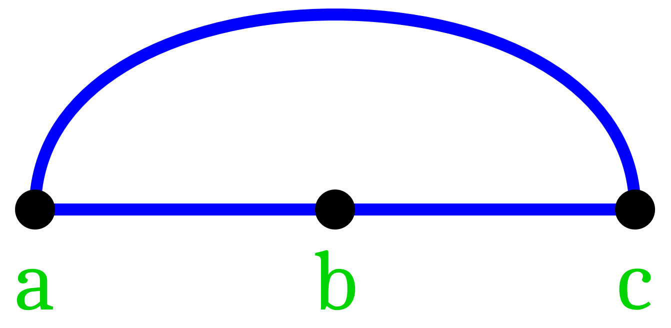


$$\mathcal{O}(n^{\omega})$$

Graphe de comparabilité

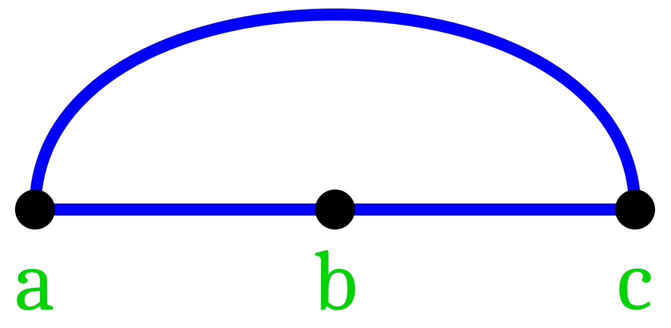
$$\omega \lesssim 2.37$$

Motifs à 3 sommets



Graphe sans triangle

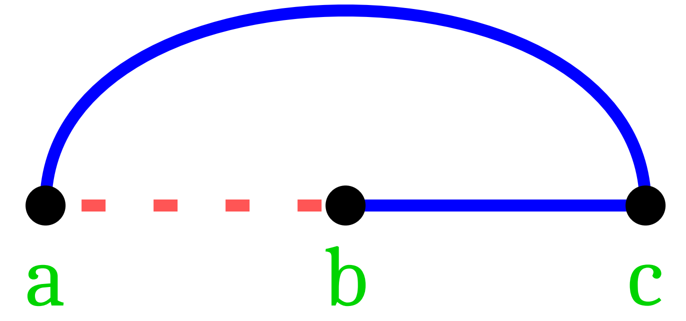
Motifs à 3 sommets



Graphe sans triangle

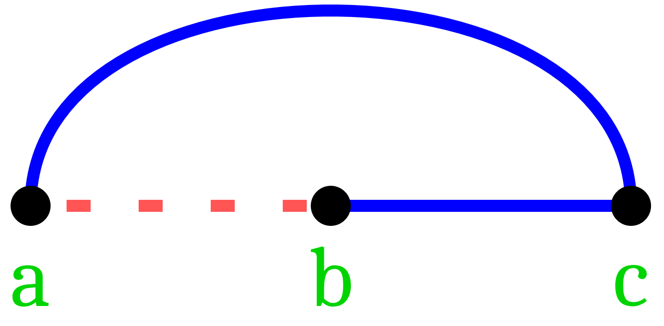
$\mathcal{O}(n^{\omega})$

Motifs à 3 sommets



Graphe chordal

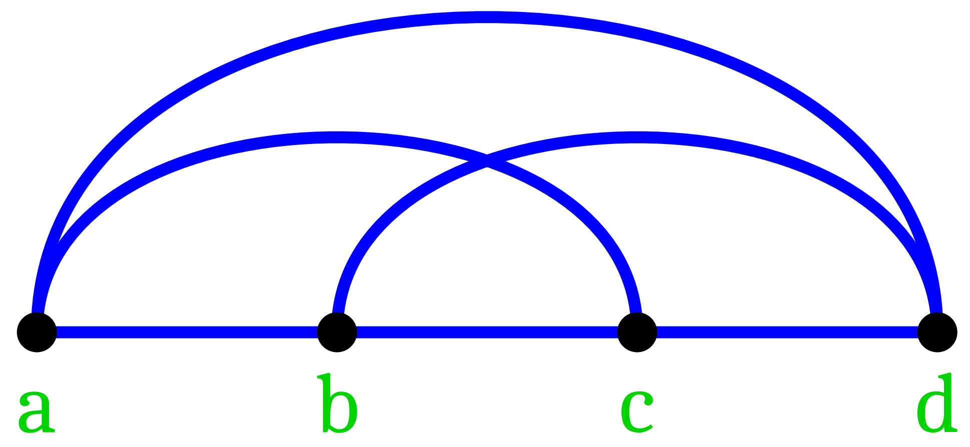
Motifs à 3 sommets



Graphe chordal

$$\mathcal{O}(n+m)$$

Motifs à 4 sommets

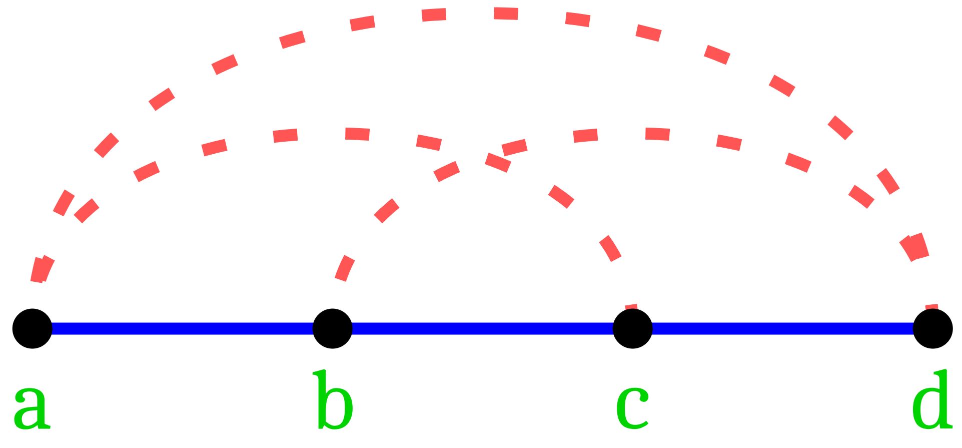


4-clique

$$\Omega\left(n^{\omega(2,1,1)}\right)$$

$$\omega(2,1,1) \lesssim 3.25$$

Motifs à 4 sommets

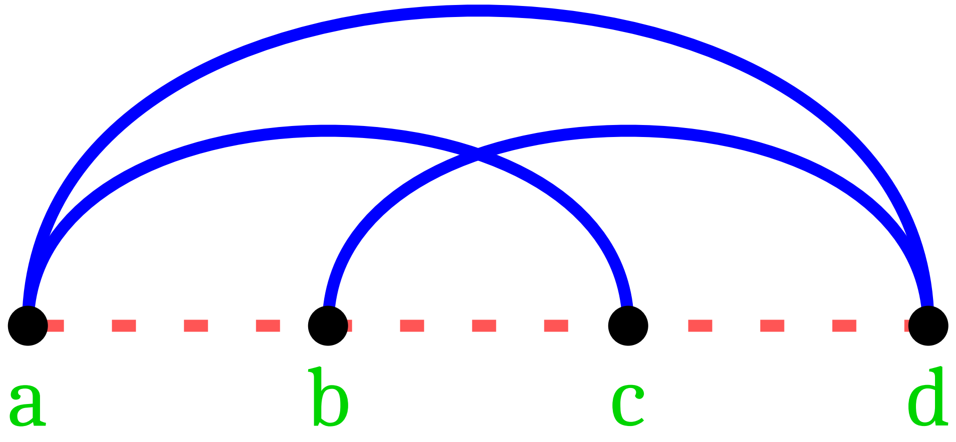


Chemin a-b-c-d

$$\Omega\left(n^{\omega(2,1,1)}\right)$$

$$\omega(2,1,1) \lesssim 3.25$$

Motifs à 4 sommets

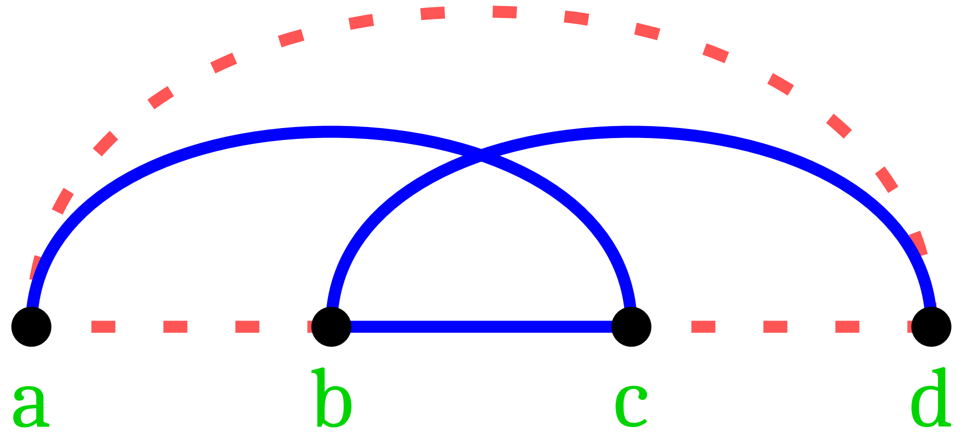


Chemin b-d-a-c

$$\Omega\left(n^{\omega(2,1,1)}\right)$$

$$\omega(2,1,1) \lesssim 3.25$$

Motifs à 4 sommets

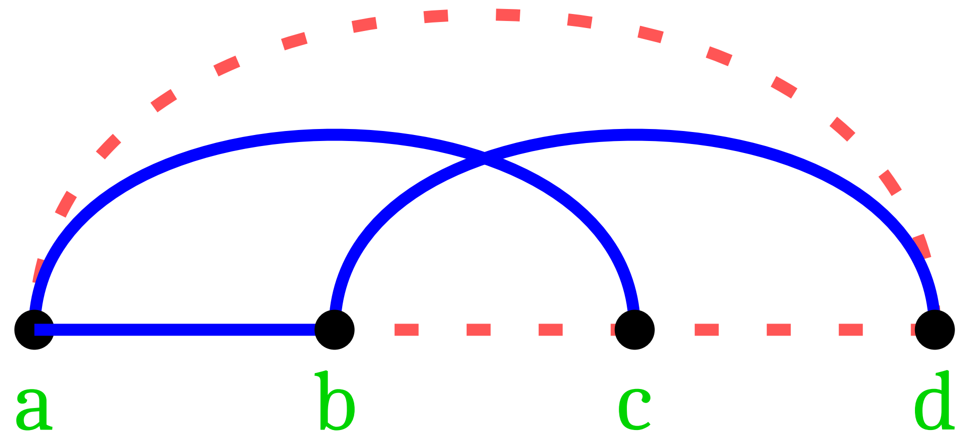


Chemin a-c-b-d

$$\Omega\left(n^3\right)$$

*combinatoire

Motifs à 4 sommets

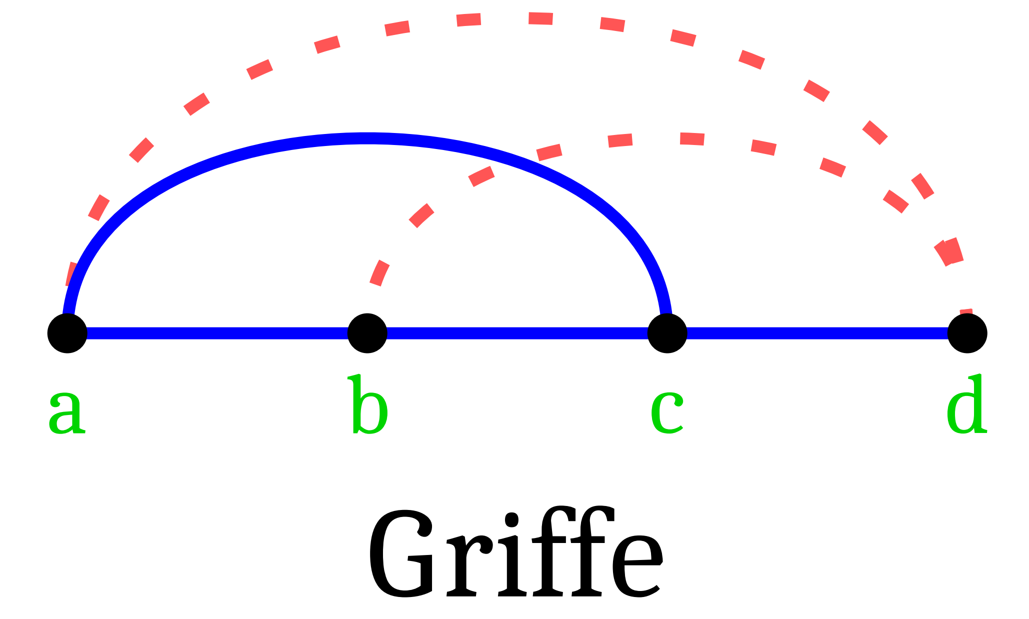


Chemin c-a-b-d

$$\Omega\left(n^3\right)$$

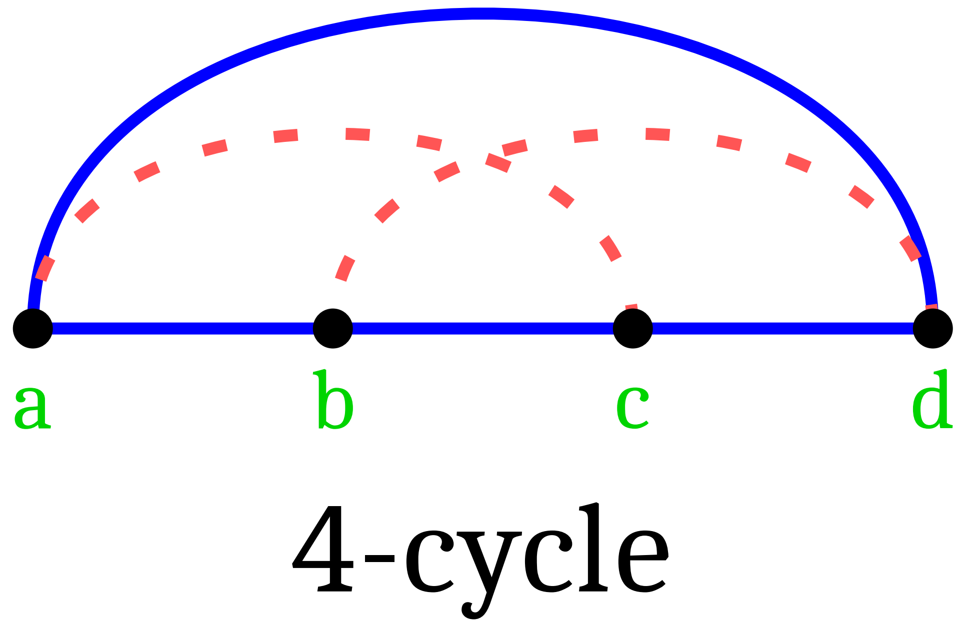
*combinatoire

Motifs à 4 sommets



$$\Omega\left(n^{\omega}\right)$$

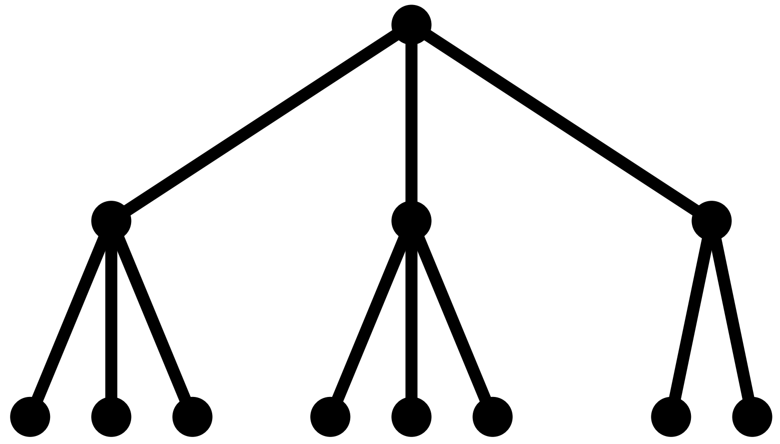
Motifs à 4 sommets



$\Omega\left(n^2\right)$

Motifs liés à une classe de graphes

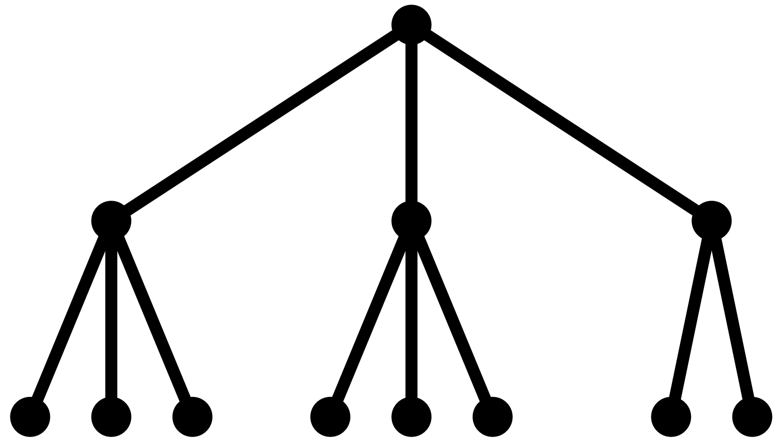
Motif forêt



$$\mathcal{O}\left(n^{?}\right)$$

Motifs liés à une classe de graphes

Motif forêt

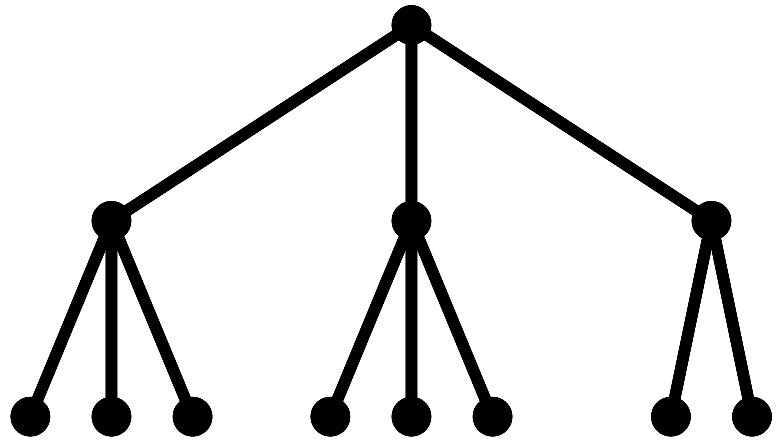


$$\mathcal{O}\left(n^{?}\right)$$

Ordre τ :

Motifs liés à une classe de graphes

Motif forêt



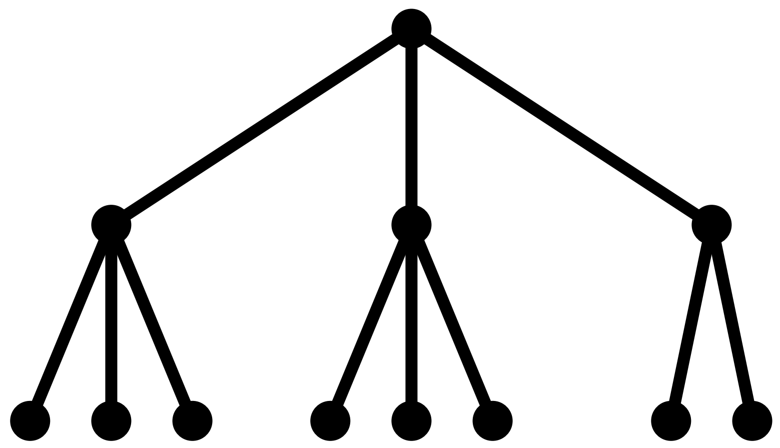
$\mathcal{O}\left(n^{?}\right)$

Ordre τ :

- DFS $\mathcal{O}(n^2)$
- BFS $\mathcal{O}(n^k)$

Motifs liés à une classe de graphes

Motif forêt



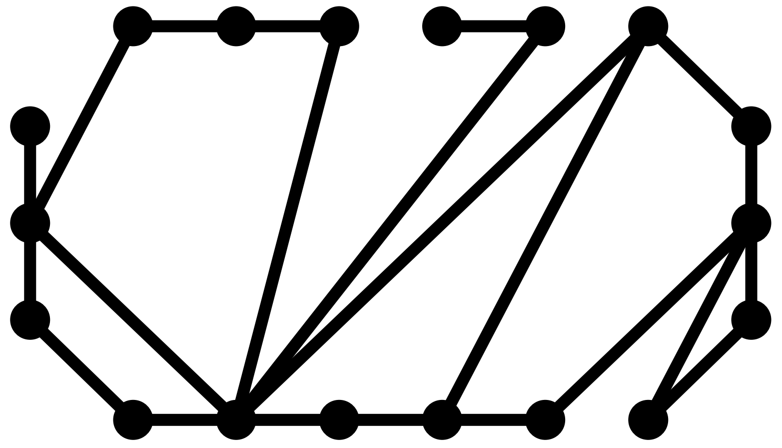
$\mathcal{O}\left(n^{?}\right)$

Ordre τ :

- DFS $\mathcal{O}(n^2)$
- BFS $\mathcal{O}(n^k)$
- planaire extérieur $\mathcal{O}(n^2)$

Motifs liés à une classe de graphes

Motif planaire extérieur



$\mathcal{O}\left(n^{\omega}\right)$

Motifs liés à une classe de graphes

Motif de ???-width p bornée

$$\mathcal{O}\left(n^{f(p)}\right)$$

Motifs liés à une classe de graphes

Motif de ???-width p bornée

$$\mathcal{O}\left(n^{f(p)}\right)$$

- tree-width
- book-thickness
- f-branch-width
- clique-width
- twin-width

Motifs liés à une classe de graphes

Motif de ???-width p bornée

$$\mathcal{O}\left(n^{f(p)}\right)$$

- tree-width(G)
- book-thickness(G)
- f-branch-width(G)
- clique-width(G)
- twin-width(G)

Motifs liés à une classe de graphes

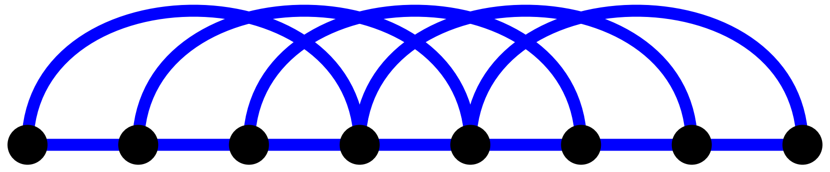
Motif de ???-width p bornée

$$\mathcal{O}\left(n^{f(p)}\right)$$

- tree-width(G)
- book-thickness(G)
- f-branch-width(G)
- clique-width(G)
- twin-width(G)
- merge-width(G, τ)

Motifs liés à une classe de graphes

Motif de merge-width p bornée



$p = 3$

$$\mathcal{O}\left(n^{\omega p/2}\right)$$

- tree-width(G)
- book-thickness(G)
- f-branch-width(G)
- clique-width(G)
- twin-width(G)
- merge-width(G, τ)

Faits intriguants

$$2 < 1$$

Il est parfois plus facile de détecter deux motifs simultanément que d'en détecter un seul.

Faits intriguants

$2 < 1$

Il est parfois plus facile de détecter deux motifs simultanément que d'en détecter un seul.

$n! < n^3$

Il est parfois plus facile de générer l'ordre τ que de certifier que (G, τ) évite le motif.

Faits intriguants

$2 < 1$

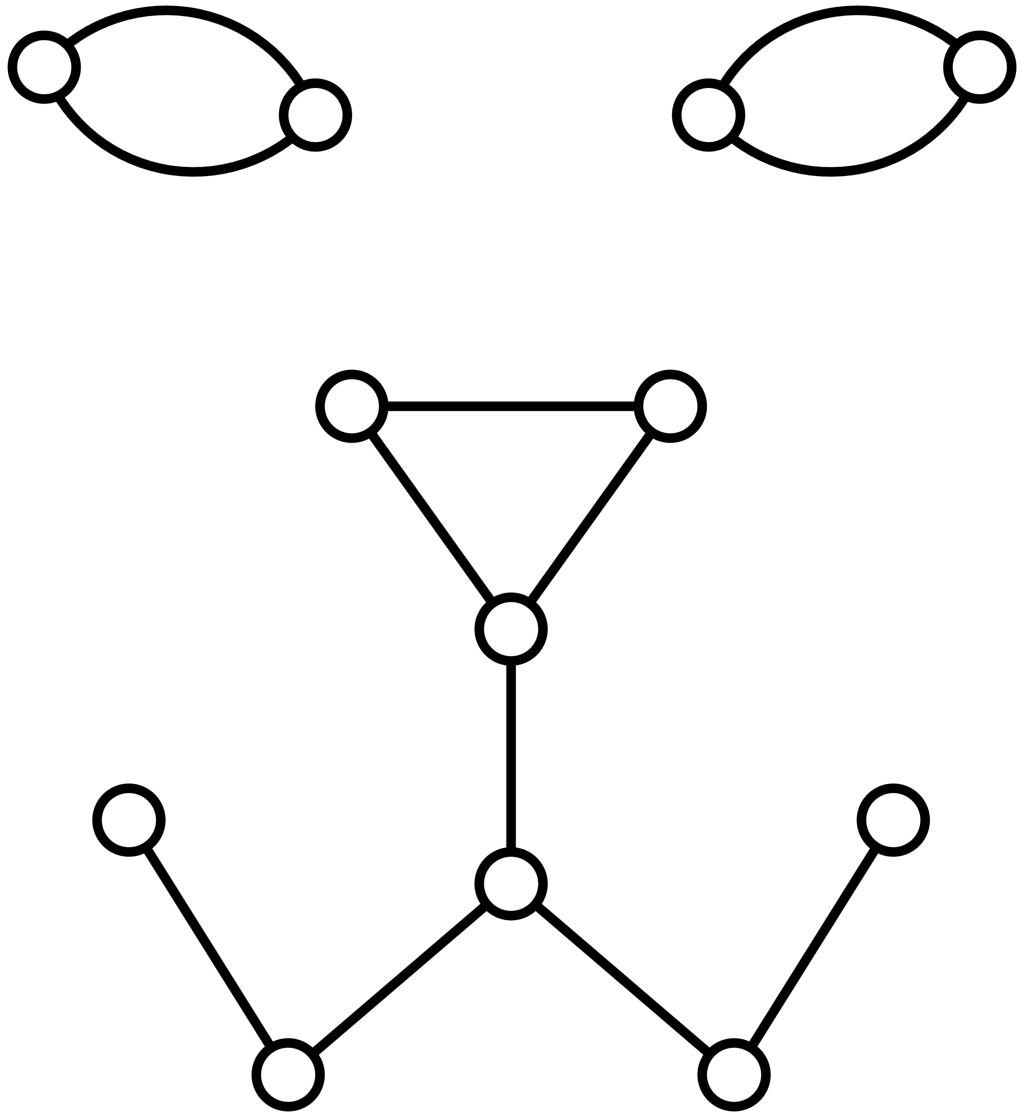
Il est parfois plus facile de détecter deux motifs simultanément que d'en détecter un seul.

$n! < n^3$

Il est parfois plus facile de générer l'ordre τ que de certifier que (G, τ) évite le motif.

$\infty = 0$

Il existe une infinité de classes de graphes héréditaires qui ne peuvent pas être définies par un nombre fini de motifs. On n'en connait aucune.



Merci !