Complexité de l'énumération des séparateurs minimaux pour l'inclusion

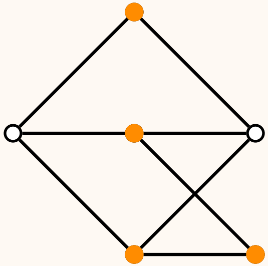
Caroline Brosse[1] Oscar Defrain Kazuhiro Kurita Vincent Limouzy
Takeaki Uno Kunihiro Wasa

[1]CNRS, Université Côte d'Azur, I3S ; Inria (équipe COATI), Sophia-Antipolis

JGA 2023

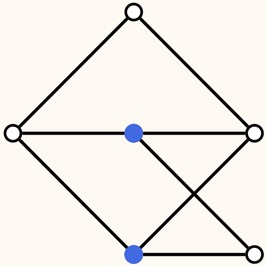
Séparateurs d'un graphe

Un séparateur d'un graphe G est un ensemble $S \subset V(G)$ tel que $G \setminus S$ n'est pas connexe.



Séparateurs d'un graphe

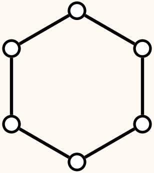
Un séparateur d'un graphe G est un ensemble $S \subset V(G)$ tel que $G \setminus S$ n'est pas connexe.

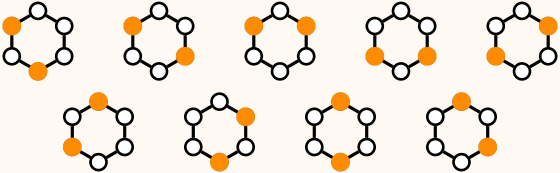


C'est un séparateur minimal si pour tout $S' \subsetneq S$, $G \setminus S'$ est connexe.

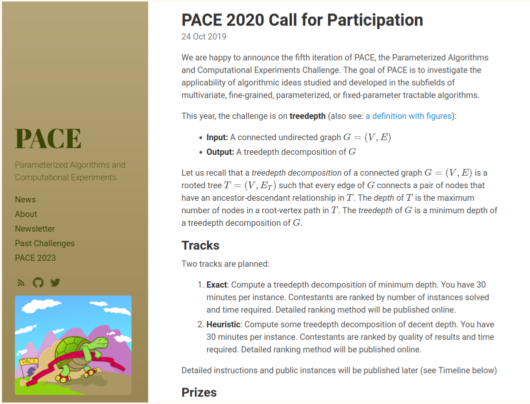
Énumérer les séparateurs minimaux ?

Problème : Trouver un algorithme qui, étant donné un graphe G, génère exactement une fois chaque séparateur minimal de G.





Liens avec les paramètres de graphes



PACE

Parameterized Algorithms and Computational Experiments

- News
- About
- Newsletter
- Past Challenges
- PACE 2023

PACE 2020 Call for Participation

24 Oct 2019

We are happy to announce the fifth iteration of PACE, the Parameterized Algorithms and Computational Experiments Challenge. The goal of PACE is to investigate the applicability of algorithmic ideas studied and developed in the subfields of multivariate, fine-grained, parameterized, or fixed-parameter tractable algorithms.

This year, the challenge is on **treedepth** (also see: a definition with figures):

- **Input:** A connected undirected graph $G = (V, E)$
- **Output:** A treedepth decomposition of G

Let us recall that a *treedepth decomposition* of a connected graph $G = (V, E)$ is a rooted tree $T = (V, E_T)$ such that every edge of G connects a pair of nodes that have an ancestor-descendant relationship in T. The *depth* of T is the maximum number of nodes in a root-vertex path in T. The *treedepth* of G is a minimum depth of a treedepth decomposition of G.

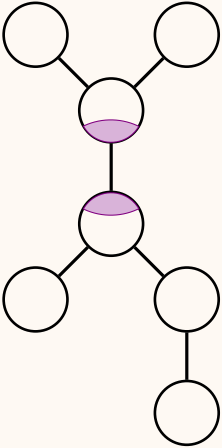
Tracks

Two tracks are planned:

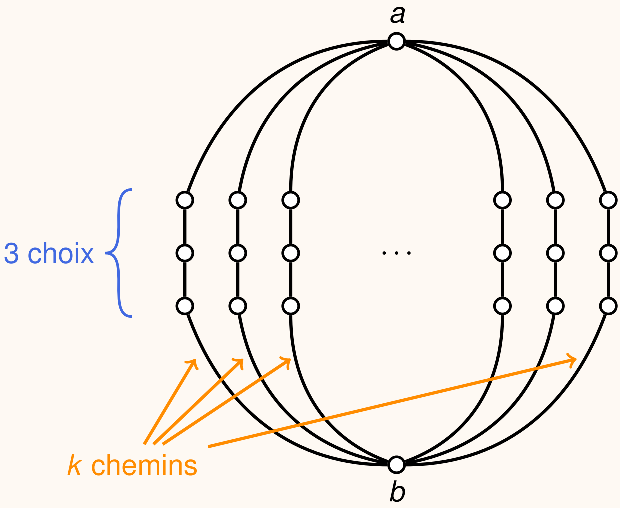
1. **Exact**: Compute a treedepth decomposition of minimum depth. You have 30 minutes per instance. Contestants are ranked by number of instances solved and time required. Detailed ranking method will be published online.
2. **Heuristic**: Compute some treedepth decomposition of decent depth. You have 30 minutes per instance. Contestants are ranked by quality of results and time required. Detailed ranking method will be published online.

Detailed instructions and public instances will be published later (see Timeline below)

Prizes



Combien de séparateurs minimaux ?

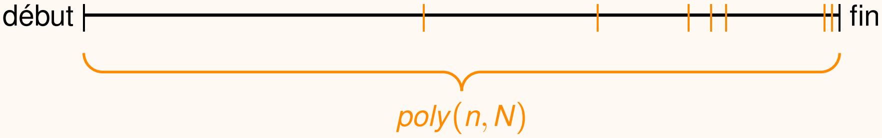


$\rightarrow \mathcal{O}(3^{n/3})$

Complexité de l'énumération

Entrée de taille n, N solutions à retourner.

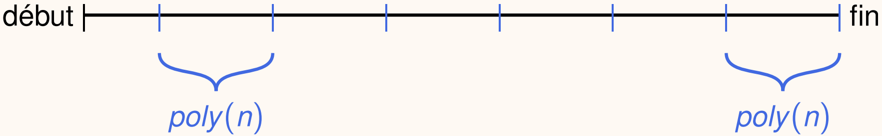
1. Output-polynomial : temps total d'exécution $poly(n, N)$



Complexité de l'énumération

Entrée de taille n, N solutions à retourner.

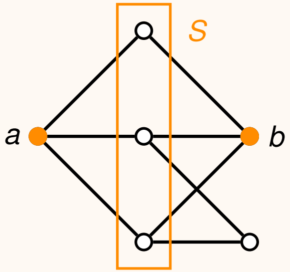
1. Output-polynomial : temps total d'exécution $poly(n, N)$
2. Délai polynomial : $poly(n)$ entre deux solutions



Aparté : (a, b)-séparateurs minimaux

I. Définition

- un graphe $G = (V, E)$,
- deux sommets a, $b \in V$ tels que $ab \notin E$

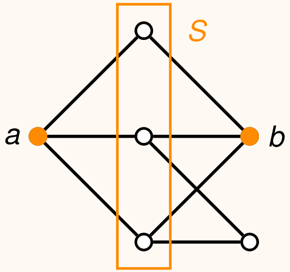


(a, b)-séparateurs : les ensembles $S \subset V$ tels que a et b sont dans deux composantes connexes distinctes de $G \setminus S$.

Aparté : (a, b)-séparateurs minimaux

I. Définition

- un graphe $G = (V, E)$,
- deux sommets a, $b \in V$ tels que $ab \notin E$

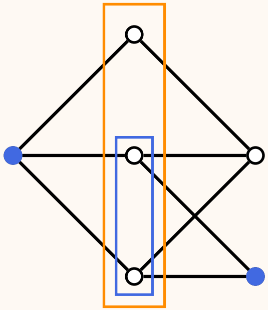


(a, b)-séparateurs : les ensembles $S \subset V$ tels que a et b sont dans deux composantes connexes distinctes de $G \setminus S$.

On regarde les minimaux pour l'inclusion avec cette propriété.

Aparté : (a, b)-séparateurs minimaux

II. Différence avec les séparateurs minimaux



Deux (a, b) séparateurs minimaux (pour deux paires (a, b) différentes) peuvent être inclus l'un dans l'autre.

Aparté : (a, b)-séparateurs minimaux

Problème : lister tous les (a, b)-séparateurs minimaux de G, sans duplication

- pour une paire (a, b) donnée
- pour toutes les paires (a, b)

Aparté : (a, b)-séparateurs minimaux

Problème : lister tous les (a, b)-séparateurs minimaux de G, sans duplication

- pour une paire (a, b) donnée
- pour toutes les paires (a, b)

Pour chacun de ces deux problèmes, on connaît des algorithmes à délai polynomial !

Retour aux séparateurs minimaux

Problème : Peut-on générer tous les séparateurs minimaux (pour l'inclusion) d'un graphe en temps output-polynomial ?

Retour aux séparateurs minimaux

Problème : Peut-on générer tous les séparateurs minimaux (pour l'inclusion) d'un graphe en temps output-polynomial ?

Théorème (B., Defrain, Kurita, Limouzy, Uno, Wasa, 2023)

À moins que P $=$ NP, *il n'existe pas d'algorithme qui génère tous les séparateurs minimaux d'un graphe en temps output-polynomial.*

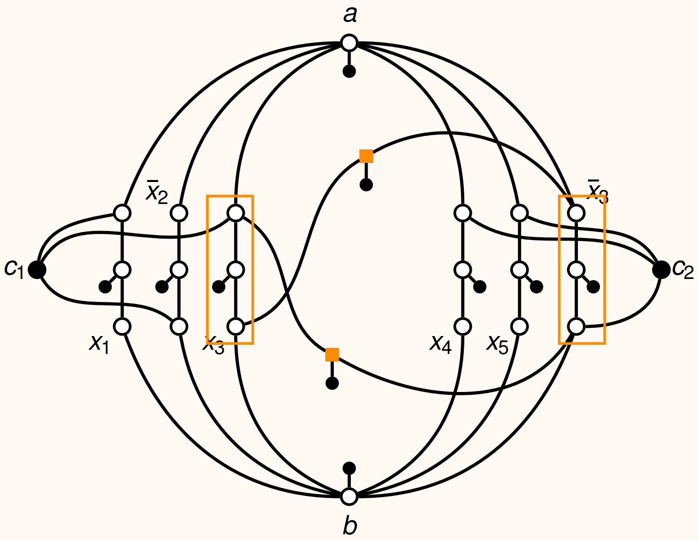
Réduction : principe

Soit $\varphi\ :\ \bigwedge_j (\ell_1^j \vee \ell_2^j \vee \ell_3^j)$ une formule 3-SAT avec les variables $x_1, \ldots, x_n$.

$$\varphi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee x_5 \vee \bar{x}_3) \wedge \ldots$$

On va construire un graphe G dans lequel trouver un séparateur minimal de taille au moins 4 est équivalent à satisfaire la formule φ.

La construction



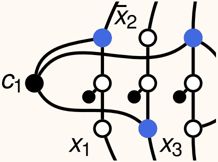
$$\varphi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee x_5 \vee \bar{x}_3)$$

Une direction

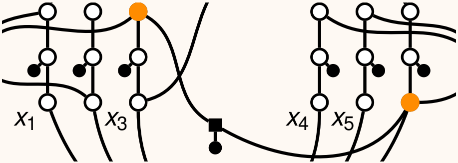
Soit S un séparateur minimal pour l'inclusion.

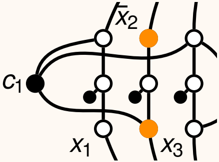
$|S| = 1$

$|S| = 3$



$|S| = 2$



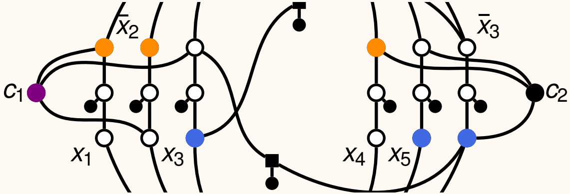


Si $|S| \geq 4$, alors S correspond à une assignation des variables qui satisfait φ.

L'autre direction

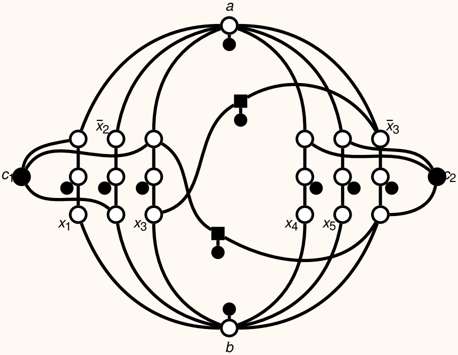
$\varphi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee x_5 \vee \bar{x}_3)$
Soit I une assignation des variables qui satisfait φ. Par exemple, $x_1 = x_2 = x_4 = 1$, $x_3 = x_5 = 0$.

- $T(I) := \{u_i^j \mid \text{la } i\text{-ème variable de la clause } j \text{ est assignée } 1\}$
- $F(I) := \{w_i^j \mid \text{la } i\text{-ème variable de la clause } j \text{ est assignée } 0\}$
- $J := \{c_j \mid \text{la clause } j \text{ est traversable}\}$



$S = T(I) \cup F(I) \cup J$

Conclusion



Énumérer les séparateurs minimaux d'un graphe est aussi difficile qu'énumérer les assignations de variables qui satisfont une formule 3-SAT.

Théorème (B., Defrain, Kurita, Limouzy, Uno, Wasa, 2023)

À moins que P $=$ NP*, il n'existe pas d'algorithme qui génère tous les séparateurs minimaux d'un graphe en temps output-polynomial.*

Merci de votre attention !