Construction de graphes universels via des reseaux de tri

Joseph HYDE Natasha MORRISON
Alp MÜYESSER Matías PAVEZ-SIGNÉ

$\mathcal{T}(n, \Delta)$ = famille des arbres T avec n sommets et $\Delta(T) \leqslant \Delta$

G est $\mathcal{T}(n, \Delta)$-universel $\iff \forall T \in \mathcal{T}(n, \Delta) \quad T \subseteq G$

$\Delta = O(1)$, $\quad n \to \infty$

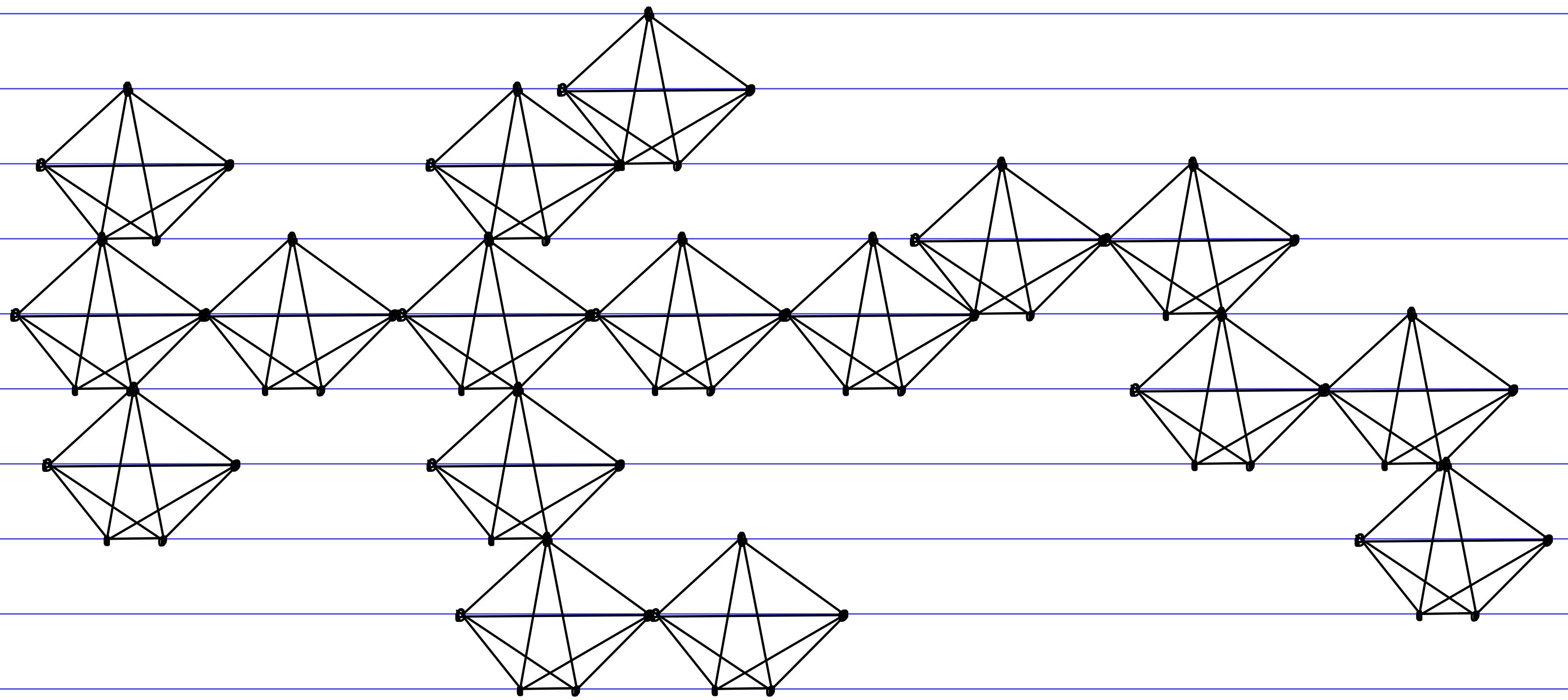
Graphes universels "peu dense"

Th. (Bhatt, Chung, Leighton, Rosenberg, 1989)

$\forall n, \Delta \quad \exists G, C_\Delta$ telle que

1. $|V(G)| = n$
2. G est $T(n,\Delta)$-universel
3. $\Delta(G) \leqslant C_\Delta$ (donc $|E(G)| = O(n)$)

Le graphe universel de BHATT et al. contient des cliques énormes partout !



Q. (Johannsen, Krivelevich, Samotij 2009)

Supposons $n \gg \Delta$.

Existe-il un G tel que

1. $|V(G)| = n$

2. G est $\mathcal{T}(n, \Delta)$-universel

3. maille $(G) \geq 10^{100}$, i.e.

△, □, ⬠, ⬡, ... $\not\subseteq G$?

C'est quoi un graphe pseudo-aleatoire ?

(n, d, λ) - graphe

- n sommets
- d - régulier
- λ : "écart spectral"

$\boxed{\lambda \text{ est petit} \Rightarrow \text{les arêtes sont "bien-distribué"}}$

(n, d, λ) - graphes

$\boxed{\lambda \text{ est petit} \Rightarrow \text{les arêtes sont « bien-distribué »}}$

L1. $\forall A, B.\ \left| e(A,B) - \frac{d}{n}|A|\cdot|B| \right| \leq \lambda \cdot \sqrt{|A|\cdot|B|}$

L2. $\sqrt{d} \leq \lambda \leq d$

Q. (Alon, Krivelevich, Sudakov 2009) $\forall \Delta\ \exists C_\Delta$ tout (n, d, λ)-graphe G où $\lambda \leq d / C_\Delta$ est $\mathcal{T}(n, \Delta)$-universel

$(\lambda = o(d))$

(On sait même pas comment plonger un chemin hamiltonien quand $\lambda = o(d)$)

TH. (HYDE - MORRISON - MÜYESSER - PAVEZ-SIGNÉ, 2023+)

$$\lambda \leq d/\log^3 n \Rightarrow G \text{ est } T(n,\Delta)\text{-universel}$$

(meilleur résultat précédent était $\lambda \leq d/e^{\sqrt{\log n}}$ obtenu par HAN-YANG)

Q. (Johannsen, Krivelevich, Samotij 2009)

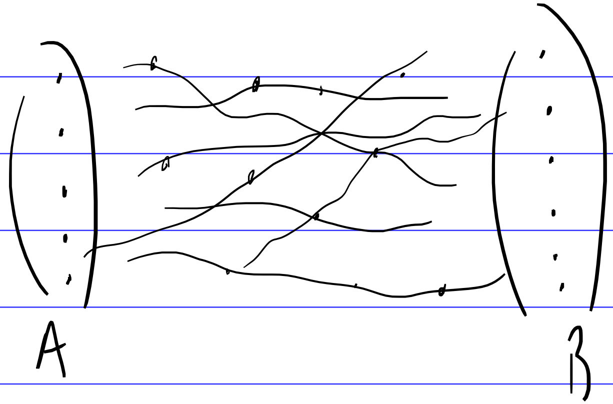
Supposons $n \gg \Delta$.

Existe-il un G tel que

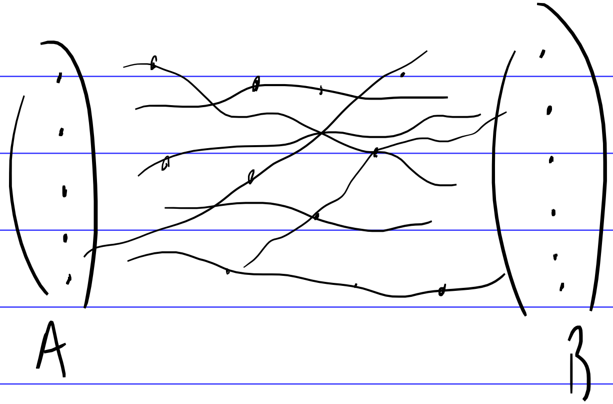
1. $|V(G)| = n$
2. G est $T(n, \Delta)$-universel
3. maille $(G) \geq 10^{100}$, i.e.

   $\triangle, \square,$ ⬠, ⬡, $\ldots \not\subseteq G$?

R: Oui, parce que $\exists$ (n, d, λ)-graphes avec $\lambda \leq d/\log^3 n$ et maille $\geq 10^{100}$!

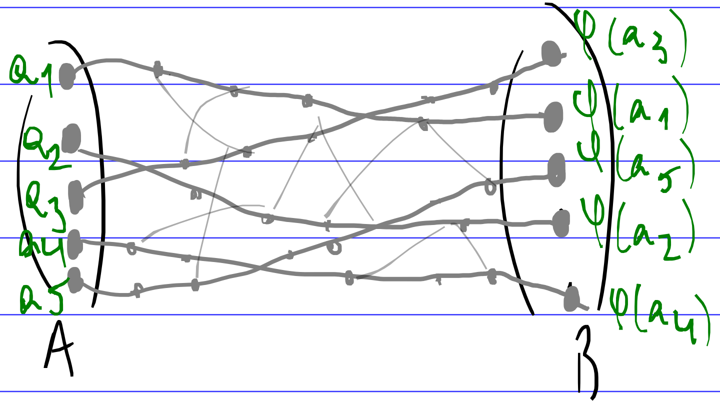
$\exists$ G  où $|A| = |B|$ tel que

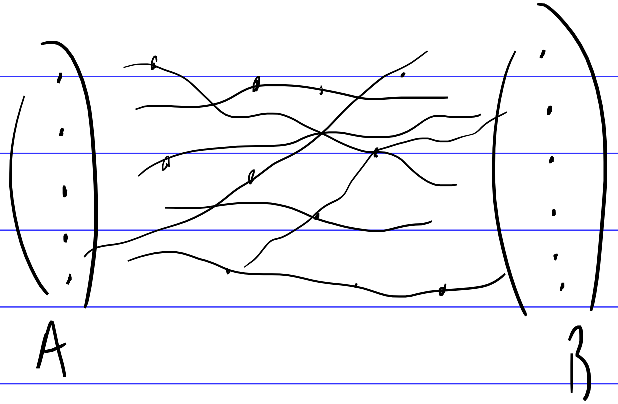
$\exists$ G



où $|A| = |B|$ tel que

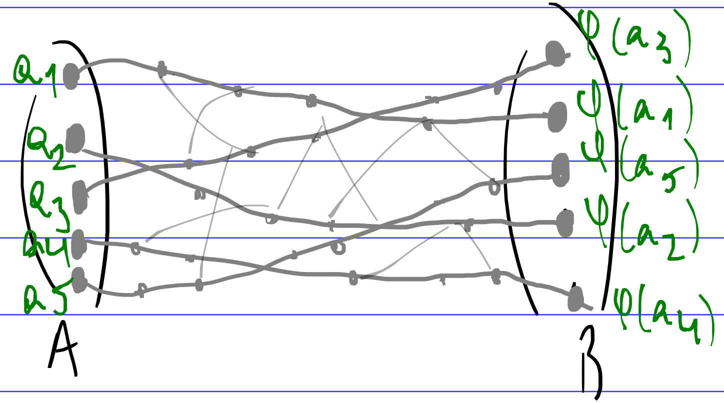
1. $\forall$ bijection $\varphi : A \to B$, G peut être partitionné par des chemins avec longeur $\leq \log^3 |A|$ avec les extrémités $a \in A$, $\varphi(a) \in B$



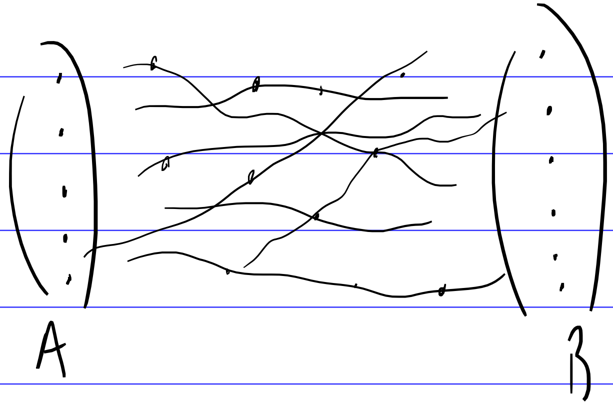
$\exists\ G$ 

où $|A| = |B|$ tel que

1. $\forall$ bijection $\varphi : A \to B$, G peut être partitionné par des chemins avec longeur $\leq \log^3 |A|$ avec les extrémités $a \in A$, $\varphi(a) \in B$

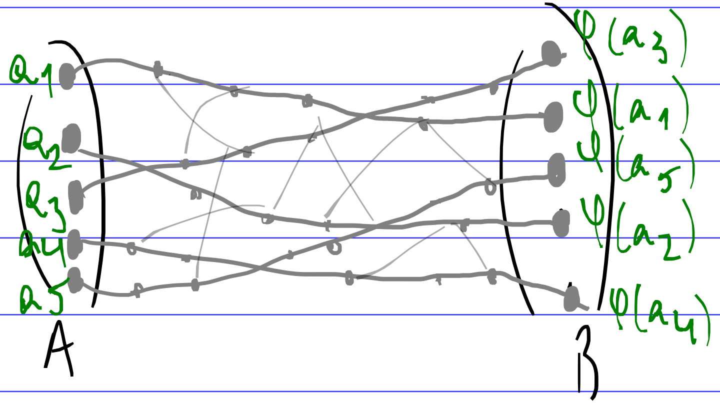


2. $\Delta(G) = 4$

$\exists$ G 

où $|A| = |B|$ tel que

1. $\forall$ bijection $\varphi : A \to B$, G peut être partitionné par des chemins avec longeur $\leq \log^3 |A|$ avec les extrémités $a \in A$, $\varphi(a) \in B$

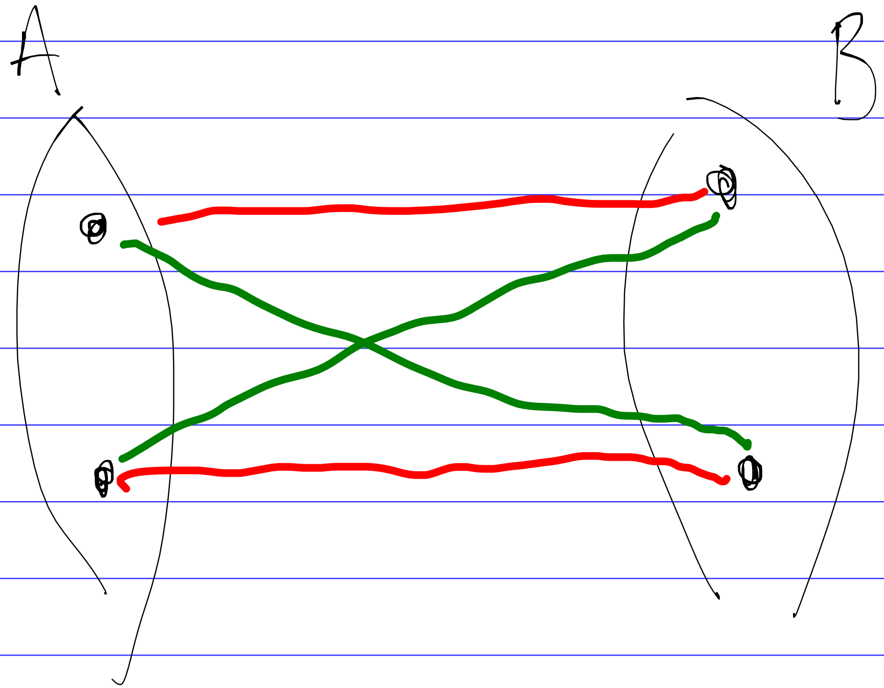


2. $\Delta(G) = 4$

3. Maille$(G) \geq 10^{100}$

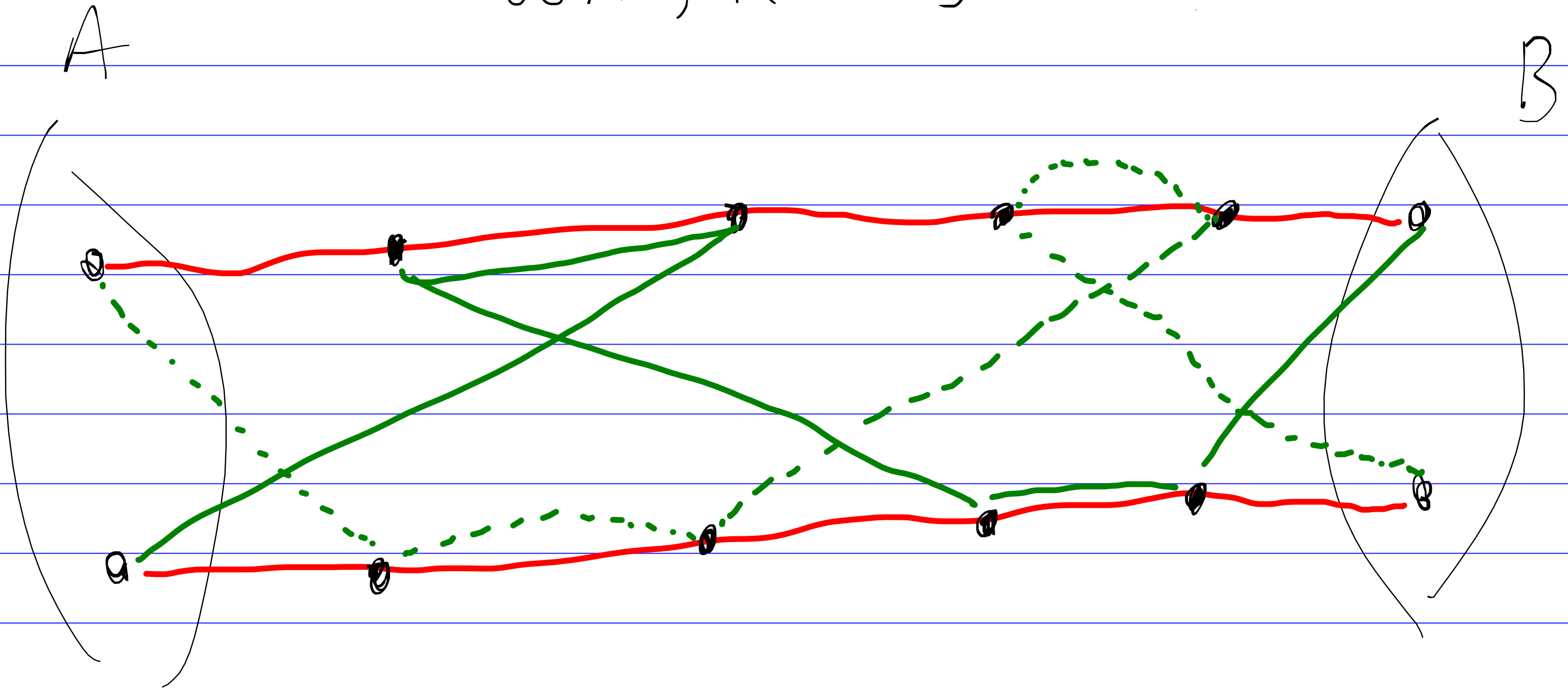
$\forall$ bijection $\varphi : A \to B$, G peut être partitionné par des chemins avec longeur $\leq (\log^3 |A|)$ avec les extrémités

$a \in A$, $\varphi(a) \in B$



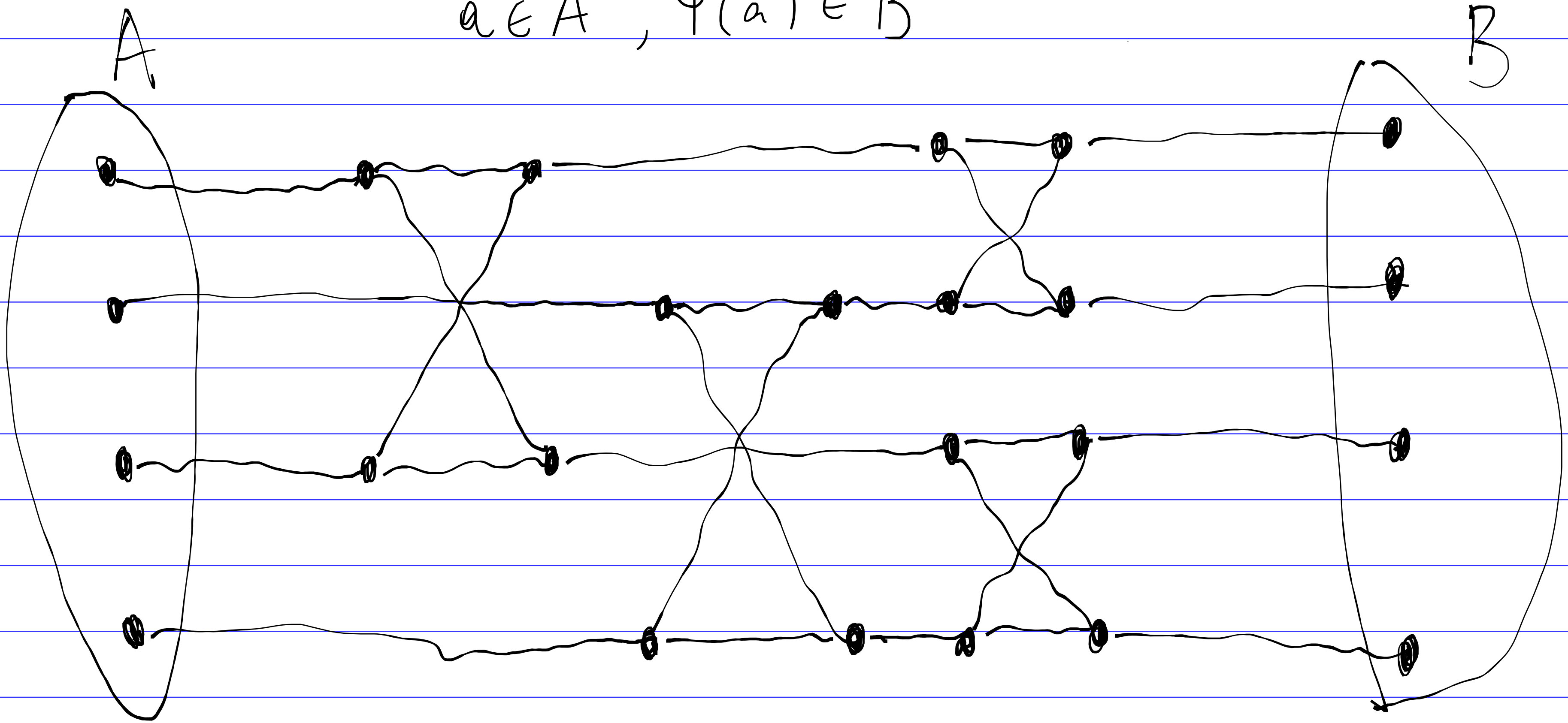
$\forall$ bijection $\varphi : A \to B$, G peut être partitionné par des chemins avec longeur $\leq \log^3 |A|$ avec les extrémités

$a \in A$, $\varphi(a) \in B$

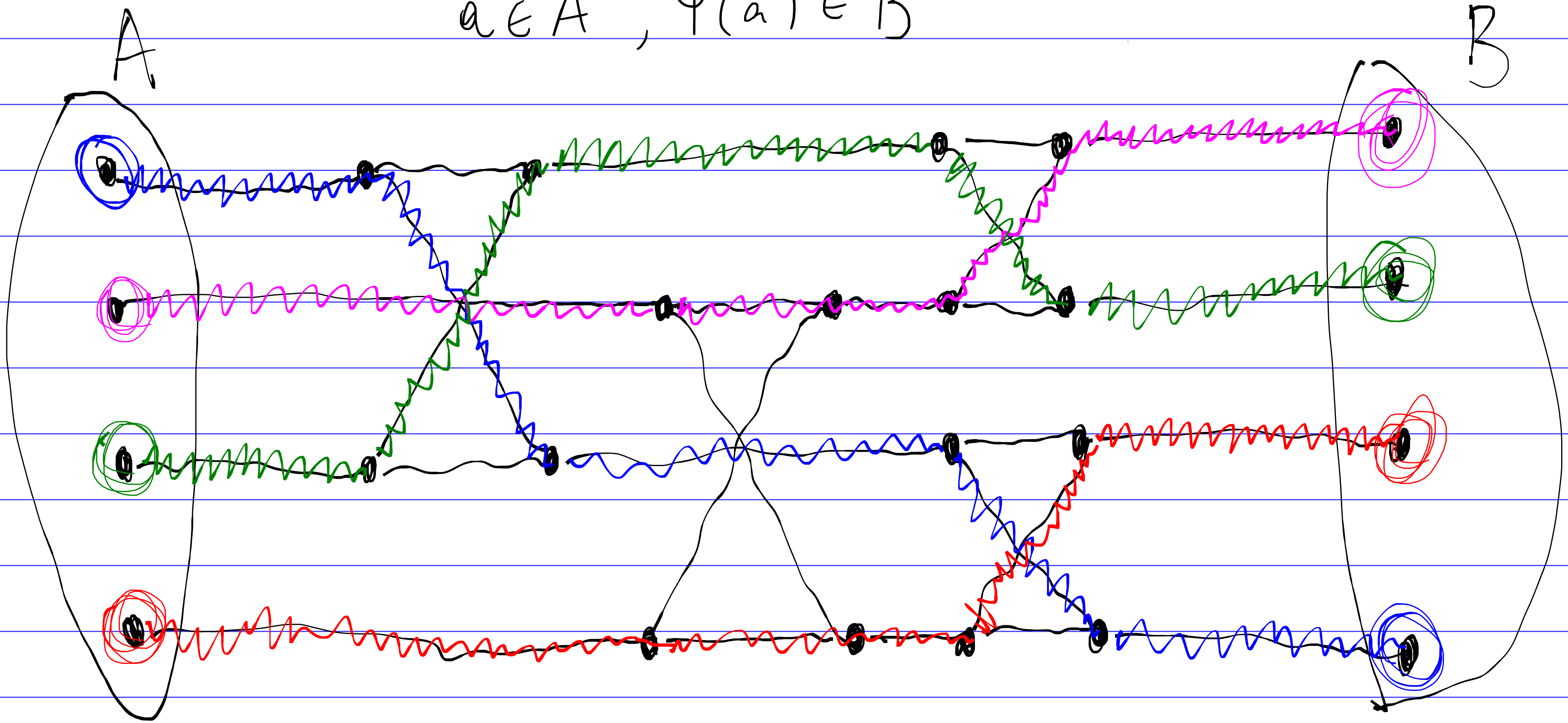


$\forall$ bijection $\varphi : A \to B$, G peut être partitionné par des chemins avec longeur $\leq \log^3 |A|$ avec les extrémités

$a \in A$, $\varphi(a) \in B$



$\forall$ bijection $\varphi : A \to B$, G peut être partitionné par des chemins avec longeur $\leq \log^3 |A|$ avec les extrémités $a \in A$, $\varphi(a) \in B$



“Spanning trees in pseudorandom graphes via sorting networks”

sur arXiv !

Merci !