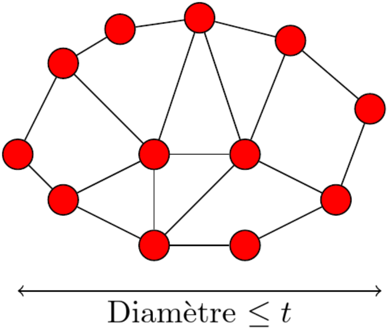
Diamètre-t Coloration de Graphes

Quentin Chuet, François Pirot

LISN, Université Paris-Saclay

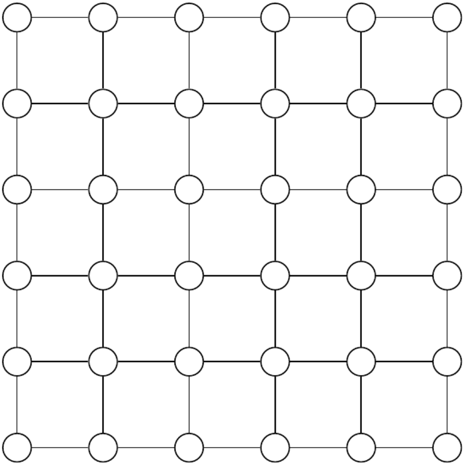
JGA 2023

Diamètre-t coloration : chaque classe de couleur induit une union disjointe de composantes de diamètres $\leq t$.

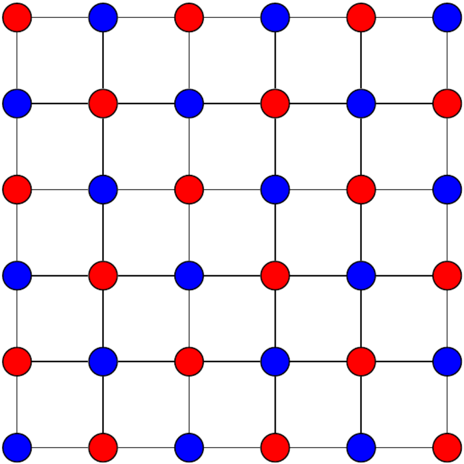


Diamètre : distance maximale entre deux sommets.

Exemple : $t = 0$ (coloration propre)

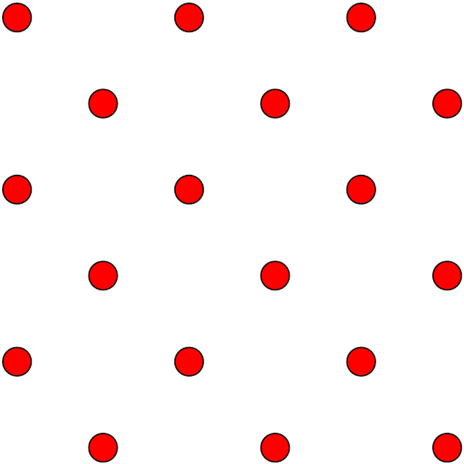


Exemple : $t = 0$ (coloration propre)



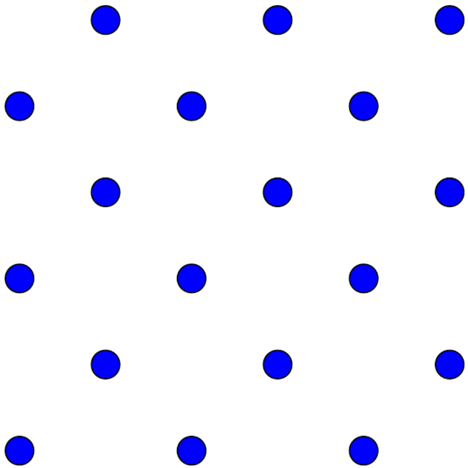
Diamètre-0 coloration

Exemple : $t = 0$ (coloration propre)



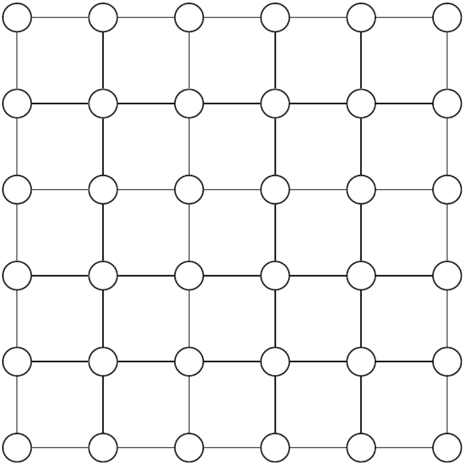
Diamètre-0 coloration

Exemple : $t = 0$ (coloration propre)

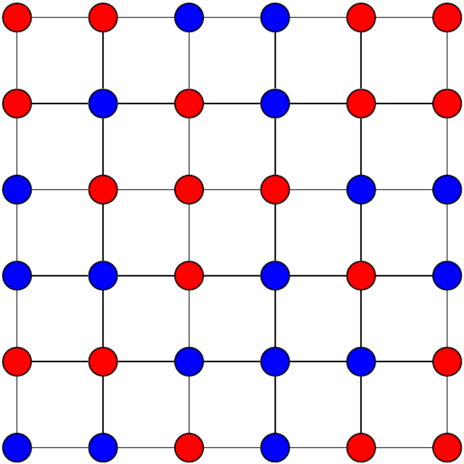


Diamètre-0 coloration

Exemple $(t = 2)$

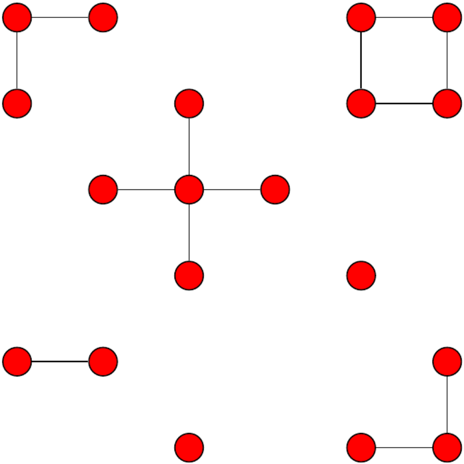


Exemple ($t = 2$)



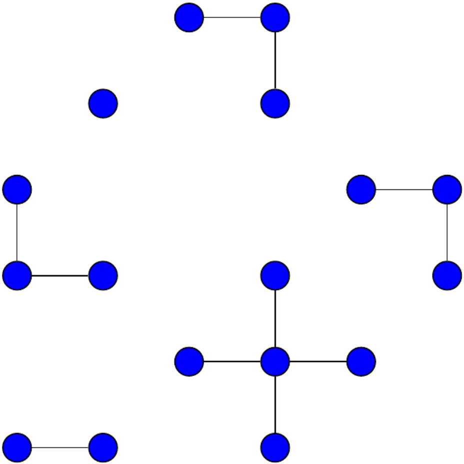
Diamètre-2 coloration

Exemple $(t = 2)$



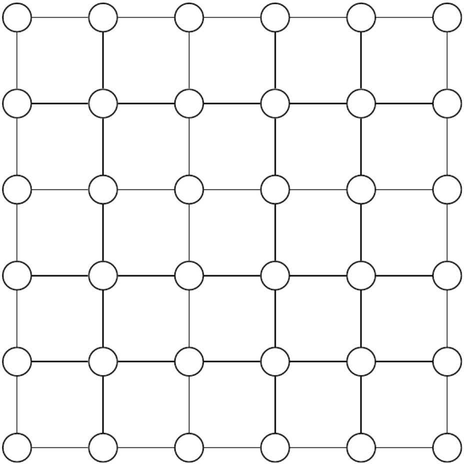
Diamètre-2 coloration

Exemple ($t = 2$)

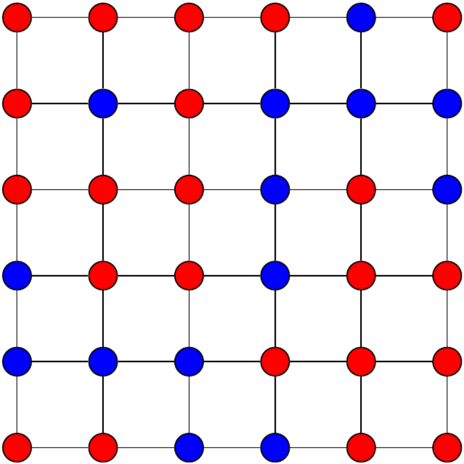


Diamètre-2 coloration

Exemple ($t = 5$)

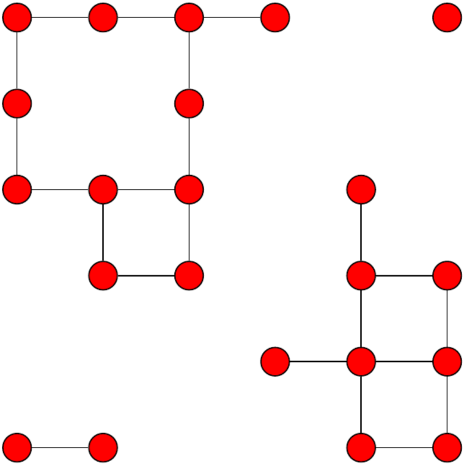


Exemple ($t = 5$)



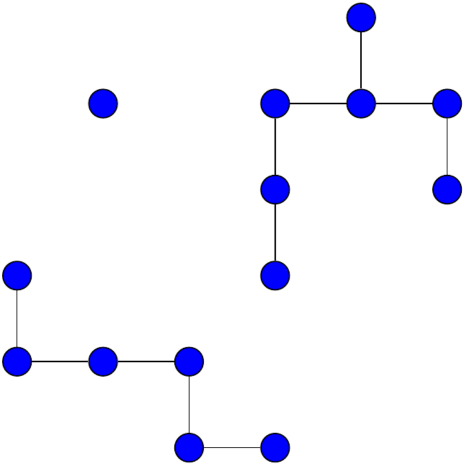
Diamètre-5 coloration

Exemple ($t = 5$)



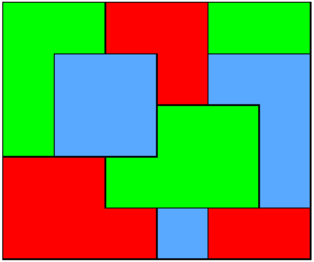
Diamètre-5 coloration

Exemple $(t = 5)$



Diamètre-5 coloration

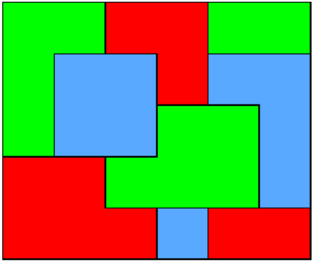
Soit Φ une diamètre-t coloration de G utilisant k couleurs.



Avec Φ, on peut résoudre de nombreux problèmes en $\mathcal{O}(kt)$ rounds.

Linial & Saks (1990) : Φ existe si $k = t = \Theta(\log n)$.

Soit Φ une diamètre-t coloration de G utilisant k couleurs.

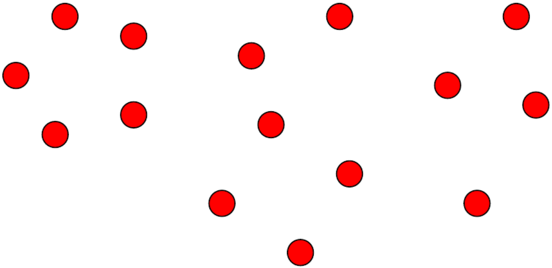


Avec Φ, on peut résoudre de nombreux problèmes en $\mathcal{O}(kt)$ rounds.

Linial & Saks (1990) : Φ existe si $k = t = \Theta(\log n)$. Et si t est fixé ?

Composante de diamètre 0 $\longleftrightarrow$ sommet isolé.

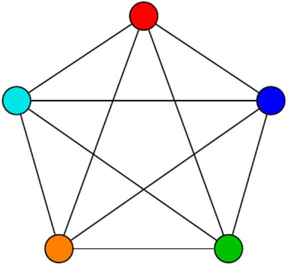
Classe de couleur : ensemble indépendant.



Diamètre-0 coloration (2)

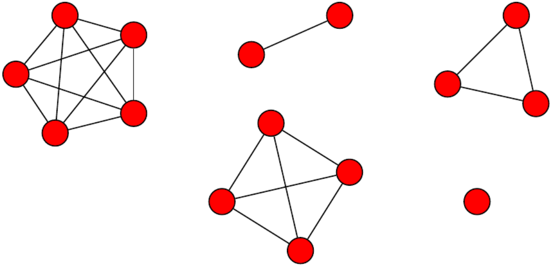
Soit G un graphe à n sommets.

$$\chi_0^{\mathrm{diam}}(G) = \chi(G) \leq n$$



Composante de diamètre 1 $\longleftrightarrow$ clique.

Classe de couleur : <u>union disjointe de cliques</u>.



Albertson et al. 1989

Soit G un graphe à n sommets. Alors

$$\chi_1^{\mathrm{diam}}(G) \lesssim \frac{n}{\log_4(n)}$$

Preuve : tout graphe à N sommets contient une clique ou un ensemble indépendant de taille $\log_4(N)$.

Broersma et al. 2002

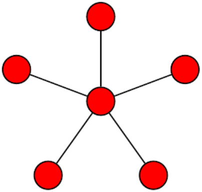
Pour tout n, il existe un graphe G à n sommets tel que

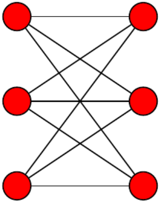
$$\chi_1^{\mathrm{diam}}(G) > \frac{n}{2\log_2(n)+1}$$

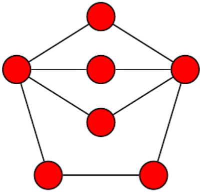
Preuve : analyse de $\mathbf{G}(n, \frac{1}{2})$.

Composante de diamètre 2 $\longleftrightarrow$? ? ?

Classe de couleur :







Observation

Soit G un graphe à n sommets. Alors

$$\chi_2^{\mathrm{diam}}(G) \leq \sqrt{n}$$

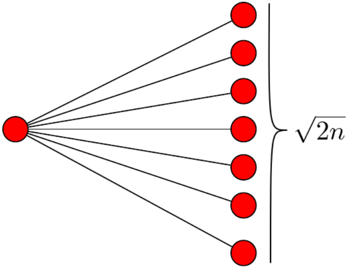
Preuve pour $\chi_2^{\mathbf{diam}}(G) \leq \sqrt{2n}$

Si $\Delta(G) \leq \sqrt{2n}$, alors $\chi_2^{\text{diam}}(G) \leq \chi(G) \leq \sqrt{2n}$.

Preuve pour $\chi_2^{\text{diam}}(G) \leq \sqrt{2n}$

Si $\Delta(G) \leq \sqrt{2n}$, alors $\chi_2^{\text{diam}}(G) \leq \chi(G) \leq \sqrt{2n}$.

Sinon, on a une étoile S à $\sqrt{2n}$ sommets :

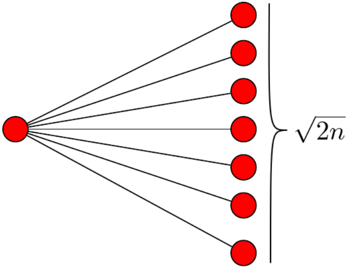


Et $\chi_2^{\text{diam}}(G) \leq 1 + \chi_2^{\text{diam}}(G - S)$

Preuve pour $\chi_2^{\mathrm{diam}}(G) \leq \sqrt{2n}$

Si $\Delta(G) \leq \sqrt{2n}$, alors $\chi_2^{\mathrm{diam}}(G) \leq \chi(G) \leq \sqrt{2n}$.

Sinon, on a une étoile S à $\sqrt{2n}$ sommets :



Et $\chi_2^{\mathrm{diam}}(G) \leq 1 + \chi_2^{\mathrm{diam}}(G - S) \leq 1 + \sqrt{2(n - \sqrt{2n})} < \sqrt{2n}$

Rappel : $\chi_2^{\mathrm{diam}}(\mathcal{G}_n) \leq \sqrt{n}$

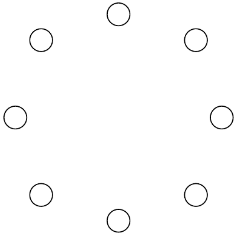
C., Pirot 2023

Pour tout n, il existe un graphe G à n sommets tel que

$$\chi_2^{\mathrm{diam}}(G) > 0.265\,\frac{\sqrt{n}}{\log n}$$

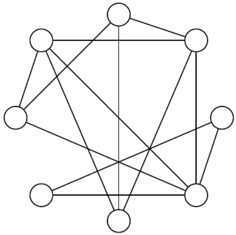
Idée de la preuve

On considère le graphe aléatoire $\mathbf{G}(n, \frac{1}{2})$



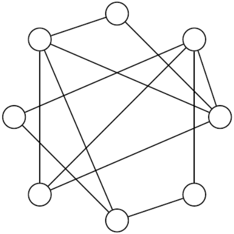
Idée de la preuve

On considère le graphe aléatoire $\mathbf{G}(n, \frac{1}{2})$

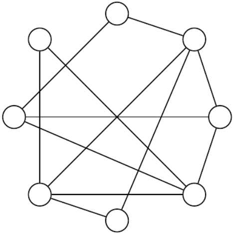


Idée de la preuve

On considère le graphe aléatoire $\mathbf{G}(n, \frac{1}{2})$



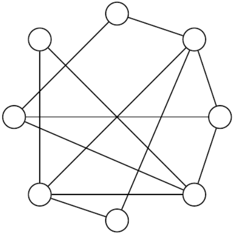
On considère le graphe aléatoire $\mathbf{G}(n, \frac{1}{2})$



Problème : avec grande probabilité, $\mathbf{G} \leftarrow \mathbf{G}(n, \frac{1}{2})$ a diamètre 2.

Solution : on considère $L(\mathbf{G})$, le *line-graphe* de $\mathbf{G}$.

On considère le graphe aléatoire $\mathbf{G}(n, \frac{1}{2})$



Problème : avec grande probabilité, $\mathbf{G} \leftarrow \mathbf{G}(n, \frac{1}{2})$ a diamètre 2.

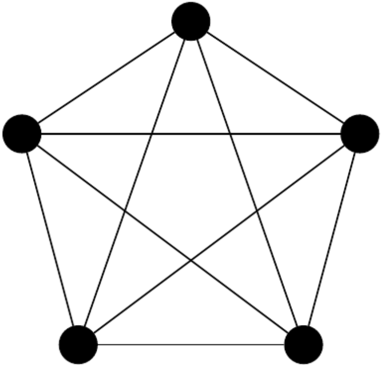
Solution : on considère $L(\mathbf{G})$, le *line-graphe* de $\mathbf{G}$.

Affirmation

Avec grande probabilité, $\chi_2^{\mathrm{diam}}(L(\mathbf{G})) = \Omega\left(\frac{n}{\log n}\right)$
et $|E(\mathbf{G})| \approx n^2/4$

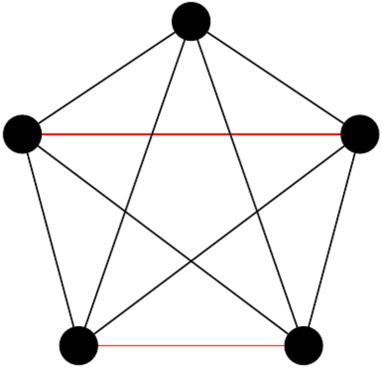
Idée de la preuve (2)

Soit $H \subseteq \mathbf{G}$ (connexe) telle que $L(H)$ a diamètre 2.



Idée de la preuve (2)

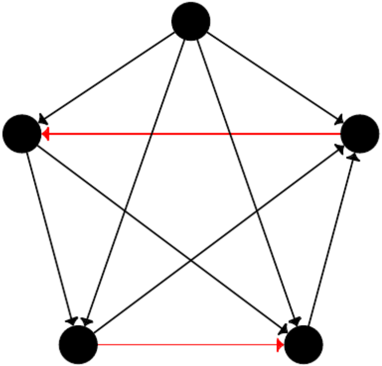
Soit $H \subseteq \mathbf{G}$ (connexe) telle que $L(H)$ a diamètre 2.



Soit M un couplage maximum de H.

Idée de la preuve (2)

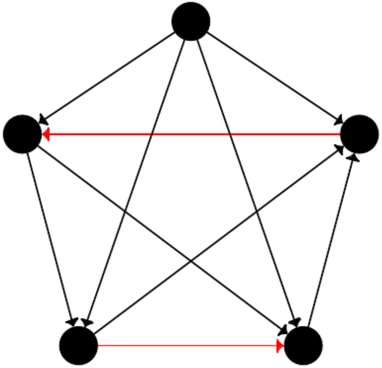
Soit $H \subseteq \mathbf{G}$ (connexe) telle que $L(H)$ a diamètre 2.



Soit M un couplage maximum de H.
On oriente chaque arête vers une arête incidente $e \in M$.

Idée de la preuve (2)

Soit $H \subseteq \mathbf{G}$ (connexe) telle que $L(H)$ a diamètre 2.



Soit M un couplage maximum de H.
On oriente chaque arête vers une arête incidente $e \in M$.
Alors $|E(H)| = \sum_{v \in V(H)} d^+(v) \leq |V(H)| \cdot 2|M|$.

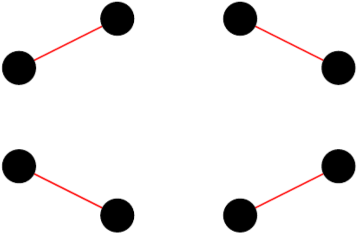
Idée de la preuve (3)

Reformulation :

$$\frac{|E(H)|}{|V(H)|} \leq 2|M|$$

Reformulation :

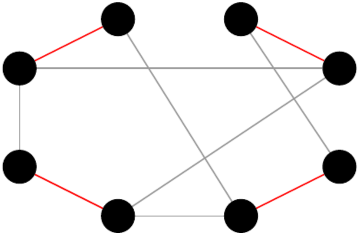
$$\frac{|E(H)|}{|V(H)|} \leq 2|M|$$



Idée de la preuve (3)

Reformulation :

$$\frac{|E(H)|}{|V(H)|} \leq 2|M|$$

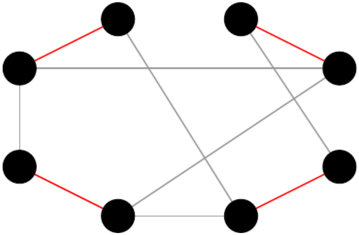


On a supposé $L(H)$ de diamètre 2, donc les arêtes de M sont deux à deux reliées (ce qui arrive avec proba $1 - \frac{1}{16}$).

Idée de la preuve (3)

Reformulation :

$$\frac{|E(H)|}{|V(H)|} \leq 2|M|$$

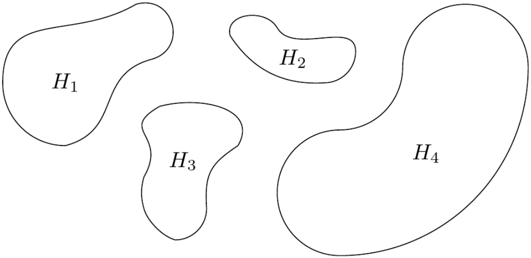


On a supposé $L(H)$ de diamètre 2, donc les arêtes de M sont deux à deux reliées (ce qui arrive avec proba $1 - \frac{1}{16}$).

Avec grande probabilité, $|M| \leq \mathcal{O}(\log n)$.

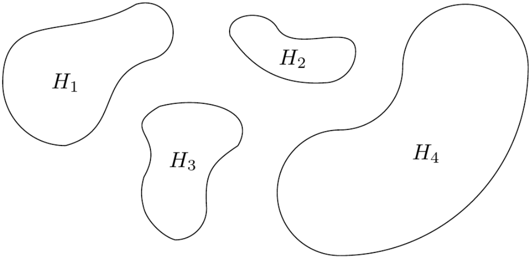
Idée de la preuve (4)

On considère maintenant une union disjointe de tels sous-graphes : $X = H_1 \sqcup H_2 \sqcup \cdots \sqcup H_k$. $\quad$ ($E(X)$ est une classe de couleur)



Idée de la preuve (4)

On considère maintenant une union disjointe de tels sous-graphes :
$X = H_1 \sqcup H_2 \sqcup \cdots \sqcup H_k$. $\qquad$ ($E(X)$ est une classe de couleur)



Alors $\frac{|E(X)|}{|V(X)|} \leq \mathcal{O}(\log n)$. Donc $|E(X)| \leq \mathcal{O}(n \log n)$.

Donc

$$\chi_2^{\mathrm{diam}}(L(\mathbf{G})) \geq \Omega\left(\frac{n}{\log n}\right) = \Omega\left(\frac{\sqrt{m}}{\log m}\right)$$

Récapitulatif

Soit $\mathcal{G}_n$ l'ensemble des graphes à n sommets.

t	$\chi_t^{\mathrm{diam}}(\mathcal{G}_n)$
0	n
1	$\Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$
2	Entre $\Omega\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)$ et $\mathcal{O}(\sqrt{n})$

Extras

En fonction du degré max ?

Pour tout graphe G de degré max Δ :

$$\chi_1^{\mathrm{diam}}(G) \leq \frac{\Delta}{2} + 1$$

(Conséquence immédiate de résultats sur la 1-impropre coloration)

Pour tout $t \geq 0$, $\Delta \geq 2$, il existe un graphe G de degré max Δ tq

$$\chi_t^{\mathrm{diam}}(G) > \frac{\Delta}{4}$$

(Line-graphe d'un graphe H de maille $2t+2$ et $\left\lfloor \frac{\Delta}{2} + 1 \right\rfloor$-régulier)

$\mathcal{G}_n$: ensemble des graphes à n sommets.

t	$\chi_t^{\mathrm{rad}}(\mathcal{G}_n)$ upper bound	$\chi_t^{\mathrm{rad}}(\mathcal{G}_n)$ lower bound
0	n	
1	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{2}\sqrt{n}$
2	$3\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{2}\sqrt[3]{n}$
3	$4\sqrt[4]{n}$	$\frac{1}{2}\sqrt[4]{n}$
≥ 4	$(t+1)\sqrt[t+1]{n}$	$\frac{1}{t+1}\sqrt[t+1]{n}$

$\mathcal{G}_n$: ensemble des graphes à n sommets.

t	$\chi_t^{\mathrm{diam}}(\mathcal{G}_n)$ upper bound	$\chi_t^{\mathrm{diam}}(\mathcal{G}_n)$ lower bound
0	n	
1	$(2+o(1))\frac{n}{\log_2(n)}$	$\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\frac{n}{\log_2(n)}$
2	$\sqrt{n}$	$0.265\frac{\sqrt{n}}{\log(n)}$
3	$\mathcal{O}\left(\sqrt{n\sqrt{\frac{\log\log n}{\log n}}}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt[4]{n}$
≥ 4	$\lfloor t/2+1\rfloor \sqrt[\lfloor t/2+1\rfloor]{n}$	$\frac{1}{t+1}\sqrt[t+1]{n}$