Table des matières

Bornes de type Caro-Wei pour les forêts linéaires induites

Gwenaël Joret, Université libre de Bruxelles, `gwenael.joret@ulb.be`
Robin Petit, Université libre de Bruxelles, `robin.petit@ulb.be`

En 1979 et 1981, Caro [1] et Wei [2] ont démontré indépendamment un résultat qui porte leur nom et qui précise que tout graphe G admet un ensemble indépendant de taille au moins $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v)+1}$.

En 1987, Alon, Kahn et Seymour [3] ont généralisé ce résultat en montrant qu'il était possible de trouver un sous-graphe induit k-dégénéré de taille au moins $\sum_{v \in V(G)} \min \left\{1, \frac{k+1}{d(v)+1}\right\}$. En particulier, pour $k = 0$, ce résultat se réduit au théorème de Caro-Wei. Pour $k = 1$, si nous supposons que G n'a pas de sommet isolé, ce résultat énonce qu'il existe une forêt induite de taille au moins deux fois la borne de Caro-Wei : $\sum_{v \in V(G)} \frac{2}{d(v)+1}$.

Récemment, Akbari, Amanihamedani, Mousavi et Nikpey [4] ont montré que si le graphe G est régulier, alors ce dernier admet une forêt linéaire induite satisfaisant cette même borne. Une forêt est *linéaire* si toutes ses composantes connexes sont des chemins. Cette borne inférieure n'est plus vraie si on enlève l'hypothèse de régularité, comme le montre par exemple $K_{1,3}$. Cependant, les contre-exemples connus ont tous des sommets de degré 1, ce qui a amené les auteurs de [4] à conjecturer que, si G a degré minimum au moins 2, alors G contient une forêt linéaire induite de taille au moins $\sum_{v \in V(G)} \frac{2}{d(v)+1}$. Notre résultat principal est une preuve de cette conjecture.

Si les sommets de degré 1 sont permis, nous montrons qu'il existe une infinité de fonctions extrémales ("meilleures possibles") $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que tout graphe G contient une forêt linéaire induite de taille au moins $\sum_{v \in V(G)} f(d(v))$, et nous en donnons une caractérisation complète.

Références

[1] Y. Caro, *New results on the independence number*, Technical Report, Tel-Aviv University (1979).

[2] V. K. Wei, *A lower bound on the stability number of a simple graph*, Technical Report, Bell Laboratories (1981)

[3] N. Alon, J. Kahnn and P. D. Seymour, *Large induced degenerate subgraphs*, Graphs and Combinatorics, 3 :203-211 (1987)

[4] S. Akbari, A. Amanihamedani, S. Mousavi, and H. Nikpey, *On the maximum order of induced paths and induced forests in regular graphs*, arXiv preprint arXiv :1911.02332 (2019).