

## Table des matières

P. Bastide, C. Legrand-Duchesne et A. Müyesser : Plongement aléatoire d'arbres de degré borné	2
---	---

## Plongement aléatoire d'arbres de degré borné

Paul Bastide, LaBRI, Bordeaux, paul.bastide@labri.fr

Clément Legrand-Duchesne, LaBRI, Bordeaux, clement.legrand@labri.fr

Alp Müyesser, University College London, UK, alp.muyesser.21@ucl.ac.uk

Une question récurrente en combinatoire extrémale est la suivante : Étant donné un graphe  $H$  fixé, quelle est la valeur minimale de  $\delta_n$  telle que tout graphe  $G$ , avec  $n$  sommets et de degré minimum  $\delta(G) \geq \delta_n$ , contient une copie d'un graphe  $H$  fixé. Un des premiers résultats du domaine est le théorème de Dirac : Tout graphe  $G$  tel que  $\delta(G) \geq \frac{|G|}{2}$  est hamiltonien.

De multiples variations de cette question sont possibles :

**Question 1** *Si  $\delta(G) \geq \delta_n$ , combien de copies de  $H$  le graphe  $G$  contient-il ?*

**Question 2** *Quelle est la valeur de  $p_n$  pour laquelle  $G(n, p_n)$  contient une copie de  $H$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$  ?*

**Question 3** *Quelle est la valeur de  $p_n$  telle que pour tout graphe  $G$  avec  $\delta(G) \geq \delta_n$ , si chaque arête de  $G$  est conservée avec probabilité  $p_n$ , le graphe obtenu contient encore une copie de  $H$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$  ?*

Dans le cas des arbres couvrants, Komlós, Sárközy et Szemerédi ont prouvé en 1995 que pour tout  $\alpha > 0$  et tout  $\Delta$ , tout graphe  $G$  à  $n$  sommets, avec  $n$  suffisamment grand et  $\delta(G) \geq (\frac{1}{2} + \alpha)n$ , contient chaque arbre de degré au plus  $\Delta$  avec  $n$  sommets ; avant de généraliser ce résultat aux arbres de degrés au plus  $\frac{n}{\log n}$  en 2001 (résultat optimal à un facteur multiplicatif près). Montgomery a prouvé en 2019 que  $G(n, O_\Delta(\frac{\log n}{n}))$  contient une copie de chaque arbre de degré au plus  $\Delta$  avec  $n$  sommets avec bonne probabilité.

Alors que ces trois questions étaient jusqu'ici étudiées séparément, de récents progrès sur la conjecture de Kahn-Kalai ont permis à Pham, Sah, Sawhney et Simkin[1] d'utiliser des distributions dites " $O(\frac{1}{n})$ -étalées" sur les plongements de  $H$  dans  $G$ , pour répondre à ces trois questions simultanément.

Notre contribution consiste en une autre distribution  $O(\frac{1}{n})$ -étalée sur les arbres de degré maximum  $\Delta$ . Contrairement à celle de Pham *et al.*, notre construction n'utilise ni lemme de régularité ni le *blow-up lemma*, résultant ainsi en une preuve plus courte, moins *ad-hoc*, généralisable aux digraphes et aux hyper-graphes, et avec de bien meilleures constantes.

## Références

- [1] H. T. Pham and A. Sah and M. Sawhney and M. Simkin, *A Toolkit for Robust Thresholds*, arXiv :2210.03064 (2023).