Table des matières

Saturation d'Antichaines Induites

Paul Bastide, LaBRI, Université de Bordeaux, paul.bastide@ens-rennes.fr
Carla Groenland, TU Delft, carla.groenland@gmail.com
Hugo Jacob, ENS Paris-Saclay, hugo.jacob@ens-paris-saclay.fr
Tom Johnston, University of Bristol tom.johnston@bristol.ac.uk

L'un des ensembles partiellement ordonnés (posets) les plus étudiés est la lattice booléenne. Elle est définie comme l'ensemble des sous-ensembles de $\{1, \cdots, n\}$ ordonné par la relation d'inclusion et dénoté $2^{[n]}$ par la suite.

On étudie ici le problème de combinatoire extrémale suivant : pour un poset P et un entier n fixés, on dénote par $sat^*(n, k)$ la taille minimale d'une famille $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$, qui vérifie les deux conditions suivantes :

— $\mathcal{F}$ ne contient pas P comme sous poset induit,
— Pour tout $x \in 2^{[n]} \setminus \mathcal{F}$, la famille $\mathcal{F} \cup \{x\}$ contient P comme sous poset induit.

Une telle famille est appelée *P-saturée*. Ferrara et al. [1] ont conjecturé l'asymptotique de $sat^*(n, \mathcal{A}_k)$ où $\mathcal{A}_k$ dénote l'antichaine de taille k. Cette conjecture fut affiné plus tard par Đanković et Ivan [2] :

Conjecture 1 *Đanković et Ivan [2]* $sat^*(n, \mathcal{A}_k) = (n-1)k + O_k(1)$

En plus de valider la conjecture ci-dessus, les auteurs ont calculé la valeur exacte de $sat^*(n, \mathcal{A}_k)$.

Théorème 2 *Pour* $n \geq 6 \log k$,

$$sat^*(n, \mathcal{A}_k) = n(k-1) + f(k),$$

pour une fonction ***explicite*** $f(k) = O(k \log(k))$.

Références

[1] Ferrara, Michael et Kay, Bill et Kramer, Lucas et Martin, Ryan R et Reiniger, Benjamin et Smith, Heather C et Sullivan, Eric, *The saturation number of induced subposets of the Boolean lattice*, Discrete Mathematics, vol 340, n10, 2017.

[2] Đanković, Irina et Ivan, Maria-Romina, *Saturation for Small Antichains*, arXiv :2205.07392, 2022.