

## Le théorème de Dilworth dans les graphes temporels

Dibyayan Chakraborty, University of Leeds, [d.chakraborty@leeds.ac.uk](mailto:d.chakraborty@leeds.ac.uk)  
Antoine Dailly, LIMOS, Clermont-Ferrand, [antoine.dailly@uca.fr](mailto:antoine.dailly@uca.fr)  
Florent Foucaud, LIMOS, Clermont-Ferrand, [florent.foucaud@uca.fr](mailto:florent.foucaud@uca.fr)  
Ralf Klasing, LaBRI, Bordeaux, [ralf.klasing@labri.fr](mailto:ralf.klasing@labri.fr)

Un graphe temporel est un graphe dont les arêtes sont étiquetées avec les moments discrets auxquels elles existent. Le graphe sous-jacent sans les étiquettes temporelles est appelé *l’empreinte* du graphe temporel. Nous considérons le problème de *couverture par chaînes* dans les graphes temporels dont l’empreinte est un graphe orienté acyclique (DAG) : l’objectif est de recouvrir tous les sommets du graphe avec un nombre minimal de chaînes temporelles.

Ce problème a été étudié dans les graphes classiques sous un angle algorithmique (il se résout en temps polynomial), mais également combinatoire : le théorème de Dilworth [1] sur les ensembles partiellement ordonnés implique que, dans un DAG, la taille minimale d’une couverture par chaînes est égale à la taille maximale d’une antichaine (un ensemble de sommets n’étant deux à deux pas reliés par une chaîne).

Nous nous intéressons aux aspects algorithmiques et combinatoires de ce problème dans les graphes temporels, et notamment à l’égalité de Dilworth entre les tailles minimale d’une couverture par chaînes et maximale d’une antichaine. Nous obtenons les résultats suivants :

**Théorème 1** *Le problème de couverture par chaînes est NP-complet dans les graphes temporels dont l’empreinte est un DAG ; et il existe de tels graphes ne vérifiant pas l’égalité de Dilworth.*

**Théorème 2** *Il existe un algorithme polynomial construisant une couverture par chaînes de taille minimale pour les graphes temporels dont l’empreinte est un arbre orienté ; et ces graphes vérifient l’égalité de Dilworth.*

Nous démontrons le Théorème 1 en réduisant depuis 3-DIMENSIONAL MATCHING. Le Théorème 2 se prouve par contre-exemple minimal et l’algorithme construit en même temps l’antichaine et la couverture par chaînes, ajoutant les sommets un par un et étendant une des deux structures au nouveau sommet, ce qui peut nécessiter de les modifier dans l’arbre précédent.

## Références

- [1] Dilworth, R. P. (1950). A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets. *Annals of Mathematics*, 51(1), 161–166.