

## Table des matières

L. Lyaudet : Diviser n'est pas régner ?	2
---	---

## Diviser n'est pas régner ?

Laurent Lyaudet, docteur sans affiliation, [laurent.lyaudet@gmail.com](mailto:laurent.lyaudet@gmail.com)

Dans les schémas « Diviser pour régner », une bonne division de l'instance d'un problème algorithmique peut donner un algorithme de résolution efficace. Découvrons une décomposition basée sur le principe de première différence[Sierpiński(1932)] pris sur un arbre[Lyaudet(2019)] et non une suite, qui permet de décomposer tous les graphes de degré borné en temps quasi-linéaire. Donc si  $P \neq NP$ , alors « Diviser n'est pas régner. ».

Soit un ens.  $V$ , une  $(V, k)$ -suite-d'applications est une suite d'app. de  $V$  vers les sommets de graphes de cardinalité au plus  $k$ .

**Définition 1** Soit  $G = (V_G, E_G)$  un graphe. Une  $(k, \alpha, \beta)$ -décomposition arborescente questionnable bijective de  $G$  est un triplet  $(A, ef, en)$  ( $A$  arbre binaire enraciné,  $ef$ , resp.  $en$ , fonction d'étiquetage des feuilles, resp. nœuds) : les feuilles de  $A$  sont en bijection, par la fonction  $ef$ , avec  $V_G$  ; ainsi à chaque nœud interne  $\nu$  est associé le sous-ens. de  $V_G$  union des valeurs  $ef(f)$  pour toutes les feuilles  $f$  sous le nœud  $\nu$ , définissant  $ef(\nu)$  ;  $en$  est une app. de domaine les nœuds internes de  $A$ , telle que  $en(\nu)$  est une  $(ef(\nu), k)$ -suite-d'app. ; donc,  $\forall x \in V_G$  correspond un sous-arbre/chemin de  $A$ , et puisque l'intersection de deux chemins est un chemin, on a un chemin correspondant à tout couple de sommets  $(x, y)$ . On peut ainsi définir la  $(\{x, y\}, k)$ -suite-d'app. obtenue en concaténant les  $(ef(\nu), k)$ -suites-d'app. restreintes à  $\{x, y\}$ , et l'on impose que la première différence entre l'image de  $x$  et de  $y$  dans cette suite d'app. existe et qu'elle corresponde à deux sommets adjacents, resp. non-adjacents, si  $x$  et  $y$  sont adjacents, resp. non-adjacents ;  $\alpha$ , resp.  $\beta$ , est la profondeur de l'arbre  $A$ , resp. de l'arbre étendu  $A'$  obtenu en remplaçant chaque nœud interne  $\nu$  par un chemin de nœuds (un pour chaque app. de la suite associée à  $\nu$ ), on les appelle resp. profondeur structurelle et logique de la décomposition.  $k$  est appelée la largeur de la décomposition.

Cette définition est très puissante puisque tout est décomposable avec une largeur de 2 et une profondeur linéaire. Même en se restreignant aux décompositions équilibrées, pour lesquelles  $\alpha$  est dans  $O(\log |V_G|)$ , on montre :

**Théorème 1 (Décomposition des graphes de degré borné)** *Tout graphe de degré au plus  $d$  à  $n$  sommets admet une décomposition arborescente questionnable bijective équilibrée de largeur 2, de profondeur structurelle au plus  $\lceil \lg(n) \rceil + d^2$  et de profondeur logique au plus  $\lceil \lg(n) \rceil + d^2 \times (\lceil \lg(n) \rceil + 1) = \lceil \lg(n) \rceil \times (1 + d^2) + d^2$ . De plus, cette décomposition est calculable en temps quasi-linéaire.*

## Références

- [Lyaudet(2019)] L. Lyaudet. On finite width questionable representations of orders. *CoRR*, abs/1903.02028, 2019. URL <http://arxiv.org/abs/1903.02028>.
- [Sierpiński(1932)] W. Sierpiński. Généralisation d'un théorème de Cantor concernant les ensembles ordonnés dénombrables. *Fundamenta Mathematicae*, 18 :280–284, 1932.